

Spécificités des connaissances en logique et conséquence sur la double discontinuité de Klein

Virginie Deloustal-Jorrand

Université Claude Bernard Lyon 1 S2HEP UR 4148,
Villeurbanne, 69622

virginie.deloustal-jorrand@univ-lyon1.fr

Zoé Mesnil

Université Paris Cité
zoe.mesnil@ac-paris.fr

Michèle Gandit

Université Grenoble Alpes, Maths à Modeler, IREM de
Grenoble

michele.gandit@univ-grenoble-alpes.fr

L'enseignement de la logique, dans les cours de mathématiques universitaires, paraît pertinent car celle-ci y occupe une place essentielle et transversale puisqu'elle permet de décrire, de contrôler et de valider l'activité mathématique de preuve. Notre première partie présente quelques résultats des travaux du thème « Logique et Preuve » du groupe de recherche DEMIPS. À partir d'entretiens avec des enseignant·es universitaires, nous montrons les différents choix effectués pour enseigner la logique et la preuve et les différentes épistémologies qui les sous-tendent. Par ailleurs, la logique étant timidement revenue depuis 2009 dans les programmes du lycée en France, se pose alors la question de savoir comment les étudiant·es futur·es enseignant·es peuvent s'appuyer sur leurs connaissances et les transposer afin d'enseigner à leurs élèves celles qui leur sont nécessaires à leur niveau. Nous apportons des éléments de réponse à cette question de la seconde discontinuité de Klein en présentant, d'une part, certains résultats de didactique sur les difficultés des étudiant·es et, d'autre part, des propositions de situations de formation des futur·es enseignant·es.

Mots-clés : logique, preuve, formation des enseignants, didactique des mathématiques

Specificity of the Knowledge in Logic and its Consequences on Klein's Double Discontinuity

In mathematics, logic is a field with a specific and transversal status. Indeed, it allows us to describe, control and validate mathematical activity. Therefore, it seems relevant to teach it in mathematics' classes. First, we present some research results from the DEMIPS¹ «Logic and Proof» group. Based on interviews with university teachers, we will show different choices made for these kinds of courses and the different epistemologies relating to the proof that underlie them. Furthermore, since 2009, logic is faintly coming back in the french high school curriculum. Then, how can pre-service teachers rely on their university knowledges and transpose them to teach at high school level? We are going to answer this question of Klein's second discontinuity by presenting results from research in mathematics education about students' difficulties and by explaining training situations we suggest.

Keywords: logic, proof and proving, teacher training, mathematical education

Especificidades del conocimiento en lógica y consecuencias para la doble discontinuidad de Klein

La enseñanza de la lógica en las clases de matemáticas universitarias parece pertinente, ya que esta ocupa una posición esencial y transversal. De hecho, permite describir, controlar y validar la actividad matemática de la prueba. Nuestra primera parte presenta algunos resultados de los trabajos del tema «Lógica y prueba» del grupo de investigación DEMIPS. Apartir de discusiones con docentes universitarios, presentamos las diferentes posibilidades elegidas para enseñar la lógica y la prueba, así como las diferentes epistemologías que conllevan. Por otra parte, la lógica ha ido haciéndose poco a poco un hueco desde 2009 en los programas del liceo en Francia. Entonces, surge la cuestión de saber cómo los futuros profesores pueden apoyarse en sus conocimientos y trasponerlos para enseñar a sus alumnos lo que necesitan a su nivel. Ofrecemos elementos de respuesta a esta cuestión de la segunda discontinuidad de Klein, presentando, por una parte, algunos resultados de la didáctica sobre las dificultades de los estudiantes y, por otra, propuestas de situaciones de formación de los futuros profesores.

Palabras-claves: lógica, prueba, formación del profesorado, didáctica de las matemáticas

1. Didactique et Épistémologie des Mathématiques, lien avec l'Informatique et la Physique, dans le Supérieur : <https://demips.math.cnrs.fr/>

Introduction

Il y aura facilement consensus pour dire que faire des mathématiques nécessite, et développe, des connaissances en logique. Ce sont elles qui nous permettent d'utiliser correctement le langage mathématique, et de faire des raisonnements valides. On peut dire qu'il s'agit de connaissances mathématiques d'un autre ordre, ce que Sackur et al. (2005) appellent des connaissances d'ordre II. Ces auteur·es ajoutent (p. 69) que « La logique mathématique est [...] un modèle mathématique de certaines de ces connaissances d'ordre II ». C'est une branche récente des mathématiques, qui a une place particulière au sein de celles-ci dans la mesure où nous pourrions dire que ce sont des mathématiques sur les mathématiques. En effet, les objets de la logique mathématique sont des objets mathématiques qui permettent notamment de modéliser les énoncés et les preuves. Les personnes qui font des mathématiques, et notamment les enseignant·es, ont des connaissances sur ces objets que sont les connecteurs, les quantificateurs, les règles d'inférence, qui sont « autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. » (Durand-Guerrier, 2005). Ainsi, les connaissances en logique auxquelles le titre de cet article fait référence ne sont pas des connaissances théoriques en logique mathématique, mais plutôt des connaissances pratiques, développées en situation. Alors comment acquiert-on ces connaissances ? Pour certains et certaines, juste en faisant des mathématiques... Mais force est de constater que cela ne fonctionne pas aussi bien pour tout le monde, et par ailleurs, cela ne suffit pas pour avoir le recul nécessaire pour enseigner ces connaissances.

Puisque la logique mathématique décrit, en partie, l'activité mathématique, il peut sembler pertinent de l'enseigner en cours de mathématiques. Cependant, ce n'est pas si simple : en France, bien que toute jeune, la logique mathématique a été rapidement intégrée à l'enseignement des mathématiques au moment de la réforme des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (Mesnil, 2014). Mais cette expérience, qui a sans doute pâti du manque de recul et de formation à la fois sur les notions et sur leur apprentissage, a montré que cette intégration n'entraîne pas directement une amélioration de la maîtrise du langage et du raisonnement mathématiques. Nous partageons le point de vue de nos collègues Durand-Guerrier et al. (2012) qui suggèrent cependant qu'elle a sa place dans l'enseignement de la preuve, à condition de prendre en charge l'articulation entre les connaissances enseignées et leur utilisation dans l'activité mathématique. Une autre condition est de reconnaître effectivement un rôle limité à la logique mathématique, et de faire place aussi dans l'enseignement de la preuve à tous les « gestes de la recherche » (Gardes, 2013) : étudier des exemples, élaborer et tester des conjectures, effectuer des contrôles locaux...

Aujourd'hui en France, la logique mathématique ne fait pas explicitement partie des domaines mathématiques qui sont enseignés à toutes et tous dans les cours de

mathématiques, ni dans l'enseignement secondaire, ni dans l'enseignement supérieur. De nombreuses recherches, tant au niveau national qu'international, mettent en évidence que dans l'enseignement supérieur, les étudiant·es ne peuvent pas s'appuyer sur une bonne maîtrise des connaissances logiques nécessaires pour affronter la formalisation et la complexification de la structure logique des énoncés mathématiques (Chellougui, 2009 ; Deloustal-Jorrand, 2004 ; Selden & Selden, 1995). Il y a donc une rupture entre les connaissances logiques dans le secondaire et dans le supérieur, c'est la première discontinuité de Klein qui n'est cependant pas spécifique à la logique.

Des cours autour du langage et de la preuve sont alors souvent proposés à l'université. En France, ils sont généralement proposés à l'entrée à l'université. Aux États-Unis, des cours intitulés Transition-to-proof sont parfois proposés après les deux premières années, moment où les étudiant·es passent de cours plus calculatoires à des cours basés sur la preuve (Selden, 2012). Selden mentionne plus de vingt-cinq livres publiés pour ces cours, et constate qu'ils commencent le plus souvent par une présentation de la logique propositionnelle avec les tables de vérité des connecteurs, puis une présentation des règles de raisonnements valides, et des types de raisonnement. En France, nous avons constaté une diversité des dénominations des cours associés à la preuve, et une diversité de contenu, notamment sur la place de la logique mathématique et le niveau de formalisation de celle-ci (Deloustal-Jorrand et al., 2020). Nous présentons, dans la première partie de cet article, quelques résultats de nos entretiens avec les enseignant·es universitaires de quelques cours.

Au lycée, après sa disparition dans les programmes du début des années 80, la logique revient timidement depuis 2009 : dans le programme pour la classe de Seconde, il y a un paragraphe « Raisonnement et langage mathématiques » qui commence par « le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée ». Comme nous l'avons déjà évoqué, la logique en acte mobilisée par les enseignant·es lors de leurs études de mathématiques n'est pas suffisante pour appréhender les difficultés de leurs élèves liées à la logique et à la preuve et y remédier. D'autres connaissances sont nécessaires. Dans cette seconde discontinuité de Klein, qui pose la question du transfert des connaissances mathématiques universitaires en des connaissances utiles pour un·e enseignant·e, il y a une spécificité des connaissances en logique qui est la nécessité de commencer par rendre les étudiant·es conscient·es de leur existence. Dans la deuxième partie, nous présentons les choix épistémologiques et didactiques qui nous paraissent essentiels à une formation initiale d'enseignant·es permettant de construire ces connaissances. Dans les troisième et quatrième parties, nous opérationnalisons ces choix dans deux situations de formation des enseignant·es du second degré. Les situations présentées sont donc conçues pour faire émerger les manques et connaissances relatifs à la logique et à la preuve mais aussi pour évoquer les difficultés des élèves, préparant ainsi les étudiant·es à l'exercice de leur futur métier.

Étude de cours sur le langage et sur la preuve au début de l'université

Quelques résultats issus de recherches sur l'enseignement de la preuve à l'université

À leur arrivée à l'université, les étudiant·es sont confronté·es à la nécessité d'étudier et d'élaborer par eux-mêmes et par elles-mêmes des raisonnements et des preuves de plus en plus complexes, ce qu'ils et elles ont peu eu l'occasion de faire dans leurs études secondaires et qui leur est difficile. Des recherches s'intéressent alors à la façon dont les enseignant·es tentent d'améliorer cette situation, et aux choix qu'ils et elles font pour enseigner les connaissances nécessaires à la production de preuves.

Par exemple, Alcock (2008) analyse cinq entretiens avec des enseignant·es d'un *Transition-to-proof course*² en dégagant quatre modes de pensée utilisés dans la production de preuves : l'instanciation (comprendre un énoncé en pensant aux objets auxquels il s'applique), la pensée créative (examiner ce qui se passe avec un objet particulier pour en dégager des propriétés générales cruciales pour la preuve), la pensée critique (vérifier localement et globalement la validité de la preuve), du côté de l'aspect sémantique de la production de preuve, et la pensée structurelle (structurer la preuve en fonction de la structure de l'énoncé à prouver), du côté de l'aspect syntaxique. Tou·tes les enseignant·es reconnaissent l'importance de ces quatre catégories, mais mettent plus ou moins l'accent sur l'une ou l'autre dans leur cours. Par contre, ils et elles se disent plus outillé·es pour enseigner l'aspect structurel, même si ils et elles savent que ce n'est pas suffisant.

D'autres recherches, un peu plus nombreuses, étudient les pratiques des enseignant·es relativement à la preuve au travers de cours de mathématiques qui ne lui sont pas spécifiquement dédiés. Par exemple, Weber (2004) décrit le déploiement par un même enseignant de trois styles d'enseignement au sein d'un même cours d'introduction à l'analyse réelle, selon le chapitre abordé : logico-structurel dans la partie sur ensembles et applications (discours sur la structure locale des preuves), procédural dans la partie sur les suites (discours sur la structure globale), sémantique (donner une image des concepts manipulés dans la preuve) dans la partie sur la topologie. L'enseignant est conscient de ces trois styles d'enseignement, et fait explicitement le choix de suivre cette progression dans leur présentation. Hemmi (2010) réalise pour sa part des entretiens avec 13 enseignant·es, et dégage trois styles d'enseignement relativement à la preuve : le style progressif (ne pas imposer la preuve, certaines sont présentées par nécessité), le style classique (pas

2. Même dans les recherches internationales, il y a peu de recherches spécifiquement sur ces cours Transition-to-proof.

non plus d'intention d'enseigner la preuve, mais présence de certaines « belles preuves » par intérêt personnel), le style déductif (volonté d'enseigner la preuve, telle que la pratiquent les mathématicien·nes). D'autres enseignant·es interrogé·es par Weber (2012) disent présenter des preuves non pas pour convaincre de la vérité des résultats (fonction de validation), mais pour aider à la compréhension (fonction d'explication), ou pour illustrer des techniques de preuve. Dans plusieurs de ces différents entretiens, quel que soit le pays concerné, les enseignant·es font part de difficultés à enseigner la preuve, du manque de ressources pour cela, et certain·es suggèrent même qu'il serait plus pertinent pour certain·es étudiant·es d'enseigner les mathématiques sans faire de preuves.

Nos travaux de recherche sur des cours relatifs au langage et à la preuve à l'université en France

Méthodologie

Dans la continuité de ces études, au sein du groupe « Logique et preuve³ », nous avons mené des entretiens avec des enseignant·es de trois universités différentes (U_p , U_G et U_S) qui proposent des cours sur le langage et la preuve au début des études universitaires. Nous les avons interrogé·es sur les objectifs du cours, et sur les choix de contenus faits pour atteindre ces objectifs. La formulation des questions les invitait à évoquer à la fois leur pratique et le contenu de leur cours (par exemple, « Quelle importance accordez-vous à la rédaction dans la production d'une preuve ? Que proposez-vous aux étudiants en matière de rédaction ? »). Nous voulions ainsi faire ressortir comment, malgré l'aspect « naturalisé » des connaissances liées à la preuve, notamment des connaissances logiques, des enseignant·es problématisent ou non leur enseignement de ces connaissances, et avec quel savoir de référence.

Nous avons interrogé deux enseignant·es (désigné·es par P1 et P2) d'un cours intitulé « Raisonnement mathématique », proposé en tout début de Licence de mathématiques à U_p , un enseignant (G1), responsable d'un cours intitulé « Jeux combinatoires et raisonnement mathématique », proposé à l'ensemble des étudiant·es de première année de licence de U_G , et deux enseignants d'un cours intitulé « Fondement du calcul et du raisonnement », proposé aux étudiant·es de première année de la Licence de mathématiques de U_S (S1 et S2).

Nous avons analysé quels aspects de la preuve étaient mis en avant dans leurs réponses, selon différentes dialectiques : syntaxique / sémantique (Deloustal-Jorrand et al., 2020), fonction d'explication / fonction de validation (Hanna, 2000) (dialectiques que l'on retrouve dans les catégories des études précédemment évoquées), processus / produit

3. Thème 4 du groupe de recherche DEMIPS (voir note 1).

(Gandit, 2008), logique mathématique / logique naturelle⁴ (Deloustal-Jorrand, 2004) (qui nous semblent moins présentes dans les styles décrits précédemment).

Les premiers résultats présentés ci-après confortent l'idée de similitudes et de différences entre les trois enseignements.

Nos premiers résultats

Dans les trois cours, le choix est fait de proposer des exemples de raisonnements sur des objets simples, pour pouvoir mettre le focus sur la preuve. Pour les cours de U_p et U_s , le but est de pouvoir faire ressortir la structure des démonstrations, voire de montrer qu'on peut avoir une démarche syntaxique indépendamment des objets mathématiques en jeu. Les enseignant·es disent alors mettre l'accent sur l'enjeu de validation, avec un focus sur le formalisme du produit. La preuve ne sert pas à trancher la question de la vérité des énoncés, mais plutôt à l'attester selon le contrat en vigueur en mathématiques.

P1 : « Et là on essaie [...] d'avoir des énoncés qui sont très simples à démontrer, pour lesquels ils n'ont besoin d'aucune idée, et essayer de... par exemple qui découlent directement des définitions, on écrit les définitions et on arrive à ce qu'il faut démontrer, pour s'attacher juste à comment ça se rédige, qu'est-ce que c'est qu'une démonstration, donc séparer les deux. »

Au contraire, pour G1, la simplicité des objets en jeu a pour but de permettre que les étudiant·es puissent facilement les manipuler pour expérimenter sur des cas simples, tester des conjectures. L'accent est mis ici sur l'enjeu de découverte, avec un focus sur les heuristiques. La preuve sert à trancher quand on hésite : c'est parce qu'on a prouvé qu'on peut dire que l'énoncé est vrai.

G1 : « Mais surtout [...] on s'attache sur le fait que les étudiants soient un peu en position d'un chercheur, qui cherche sur un problème, avec des aspects un peu méthodiques, [...] commencer par des petits cas, même si le problème est posé dans un contexte général [...] et puis, après par observation, par essais erreurs, on peut émettre des conjectures, et en tentant de les démontrer, eh ben soit on les infirme, soit on les démontre et on est content. »

Dans les trois cours également, la logique intervient en lien avec l'activité mathématique, comme organisatrice du produit ou du processus. Il ne s'agit en aucun cas de parler de logique de façon décontextualisée, démarche dont on sait qu'elle ne permet pas un transfert pour le développement de compétences liées au langage et au raisonnement. Dans les cours de U_p et U_s , la logique mathématique est utilisée pour décrire le langage

4. Nous appellerons « logique naturelle » la logique utilisée dans la vie de tous les jours.

mathématique et les inférences valides. Les étudiant·es apprennent que les connecteurs servent à construire de nouvelles propositions, étudient leurs tables de vérité, apprennent à distinguer les variables libres et les variables liées, voient des schémas de déduction. L'enseignant S1 insiste sur le fait que pour sa part, il a appris tout cela naturellement, mais que pour les étudiant·es qui sont face à lui, qui semblent être plus en difficulté, c'est utile d'explicitier les règles. En revanche, pour G1, la logique mise en œuvre dans les raisonnements n'est pas formalisée.

G1 : « Alors d'une certaine manière [la logique] est partout, mais elle n'est pas formalisée ou très peu. »

Les enseignant·es P1, P2, S1 et S2 témoignent de la volonté de mettre en place des automatismes de structuration des preuves ou de rédaction. Cependant, il est clair pour eux que ces actions qui sont automatisables ne constituent qu'une petite partie de l'activité de preuve, l'idée est donc que la routinisation amène un soulagement qui va permettre de se concentrer sur autre chose. Deux des enseignant·es soulignent que la rédaction d'une preuve dépend du contexte de production : il est attendu des étudiant·es que leurs preuves donnent à voir leur compréhension des relations entre les concepts mathématiques en jeu dans la preuve.

P2 : « Ce cours c'était surtout en fait de leur apprendre à pouvoir gérer une preuve, à pouvoir écrire une démonstration, donc en fait il y avait tous les problèmes de rédactions, les mécanismes, les automatismes à avoir quand on était confronté à un certain énoncé. »

S1 : « Il faut que la preuve soit convaincante, qu'il y ait suffisamment de détails pour qu'on voie qu'ils ont compris, que l'enchaînement soit correct d'un point de vue logique. »

En revanche, l'enseignant G1 témoigne d'une volonté de mettre les étudiant·es en situation de recherche, comme le sont les chercheur·ses. G1 ne cherche pas à développer des automatismes qui sont ensuite mobilisés par les étudiant·es dans l'activité de preuve, mais, à les placer en situation de produire des preuves inédites.

D'étudiant·es à enseignant·es

Les cours proposés par les enseignant·es interrogé·es ont pour but de pallier les difficultés à comprendre et manipuler le langage mathématique, et à produire des preuves de la plupart des étudiant·es qui arrivent à l'université, et qui doivent faire face à la première discontinuité pointée par Klein. Les résultats ne montrent pas de désaccord sur les valeurs et normes associées à la preuve (Dawkins & Weber, 2017) mais plutôt des différences sur l'approche choisie pour enseigner la preuve à ce moment du début des études supérieures.

Considérons maintenant les étudiant·es qui choisissent de devenir enseignant·es de mathématiques dans le secondaire. Leur bagage mathématique est plus ou moins solide mais ils et elles peuvent s'appuyer sur une base commune concernant les notions classiques d'analyse, d'algèbre ou de probabilités par exemple. En revanche, en ce qui concerne la logique et la preuve, il semble qu'il y ait des différences notables. En effet, notre étude nous a permis de montrer qu'à l'université coexistent des façons d'enseigner la logique et la preuve (et des représentations de ce que doit être une preuve) très différentes. Il en résulte que ces futur·es enseignant·es n'ont pas tous les mêmes points d'appui relatifs à la logique et à la preuve. Cette différence participe aux spécificités de l'enseignement de la logique et de la preuve.

C'est pourquoi une formation des futur·es enseignant·es à la logique et à la preuve doit s'appuyer sur ces différences pour arriver à une culture commune. De plus, il faut aussi, et c'est une particularité de la double discontinuité de Klein à propos des connaissances relatives à la logique et à la preuve, faire émerger ces connaissances de la pratique pour en faire des objets d'étude et plus seulement des outils pour l'activité mathématique (Douady, 1986).

Cet objectif est au cœur des situations de formation destinées aux futur·es enseignant·es présentées dans la suite de l'article.

Nos choix didactiques pour la formation des enseignant·es

Nous allons présenter deux situations issues de deux séquences de formations différentes. Nous n'avons pas la place de décrire ces séquences ici mais ces situations nous permettent tout de même de montrer comment on peut faire prendre conscience aux futur·es enseignant·es de certains manques, qui les empêchent, eux-mêmes et elles-mêmes et, par suite, leurs futur·es élèves, d'avoir une « activité véritablement mathématique » (Groupe ADIREM/INRP de l'IREM de Grenoble, 2003).

Faire émerger des manques

Il s'agit de manques qui se révèlent dans la culture mathématique de ces débutant·es. Ils concernent des connaissances pour eux transparentes, qu'ils ne peuvent même pas envisager d'enseigner à leurs élèves. Sackur et al. (2005) les nomment des connaissances d'ordre II : « ce qu'il y a de plus à apprendre que les définitions et les théorèmes pour faire des mathématiques » et qui constituent « les règles du jeu mathématique » (p. 67). Ce terme englobe la logique mais aussi les connaissances liées à la validité en mathématiques, comme par exemple, le caractère de nécessité des énoncés (ce qui est affirmé par un théorème ne peut être autrement que vrai) et les connaissances qui se rapportent à

la représentation des objets mathématiques et de leurs relations. Ces manques relèvent aussi de ce que Castella (2011) appelle « les savoirs pratiques et heuristiques », comme, par exemple, savoir que l'étude de cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes, permet de dégager ce qu'on peut généraliser pour élaborer une conjecture. Ce sont ces savoirs qui sous-tendent les *gestes de la recherche* (Gardes, 2013).

Ces manques des enseignant·es débutant·es ne peuvent se révéler que dans un contexte qui questionne la pratique mathématique. Nous construisons donc nos situations afin qu'elles permettent de faire émerger ces manques et qu'elles les transforment en objets d'étude et d'enseignement.

Un exemple de manque : le malentendu de la quantification universelle implicite de l'implication

Ce malentendu que nous décrivons ci-dessous relève pour nous d'un manque en ce qu'il témoigne d'une pratique des étudiant·es qui est devenue invisible pour elles et eux. Notre première situation cherche à faire émerger ce manque.

Durand-Guerrier (1999) a montré qu'une pratique ancrée chez les professeur·es de mathématiques consiste à considérer les implications comme étant toujours implicitement universellement quantifiées. Par exemple, la phrase « si n est pair alors n est divisible par 4 », qui est vraie pour certains nombres ($n = 8$) et fautive pour d'autres ($n = 6$), sera considérée comme fautive puisqu'il existe des contre-exemples. Ceci signifie que cette phrase est bien « naturellement » interprétée comme la suivante « quel que soit l'entier naturel n , si n est pair alors n est divisible par 4 ». Cette pratique est partagée par les étudiant·es en mathématiques en fin d'université. Durand-Guerrier (1999) montre que cette pratique n'est pas partagée par les élèves, ce qui peut amener à de réelles incompréhensions. Elle propose ainsi de clarifier ces phrases au lycée en donnant des pistes pour expliciter cette quantification sans utiliser les quantificateurs. Par exemple, la phrase précédente peut être transformée en « si n est pair alors n est forcément divisible par 4 » ou encore « si n est pair alors n est toujours divisible par 4 ». Un enjeu de formation porte donc sur cet aspect de la deuxième discontinuité de Klein : amener nos étudiant·es à prendre conscience des différentes interprétations possibles d'une implication non quantifiée et leur donner des pistes pour rendre cela explicite avec les élèves (Cerclé, 2019).

Distinguer rationalités mathématique et quotidienne

L'entrée dans la rationalité mathématique ne va pas de soi (Legrand, 1988) et ne se règle pas seulement par un enseignement de la logique. Elle nécessite une explicitation de la distinction entre rationalité mathématique – transparente la plupart du temps dans

l'enseignement – et rationalité quotidienne, ceci afin de « [...] lutter efficacement contre la perversité de la scotomisation permanente en classe de mathématiques de toute cette autre rationalité que l'élève hérite de sa vie quotidienne [...] » (Legrand, 1990, p. 374).

Cette rationalité quotidienne⁵ l'emporte trop souvent sur la rationalité mathématique, même chez les enseignants stagiaires. À titre d'illustration, voici deux arguments, donnés par deux futur·es enseignant·es, recueillis en 2021, en formation, à propos d'une conjecture qui leur était proposée :

- A : «Vraie parce que je ne trouve pas de contre-exemple » ;
- B : « Justement, la conjecture ne peut pas être vraie ou fausse puisque l'hypothèse n'est pas possible. Donc la conjecture est absurde. ».

Les arguments A et B montrent que leurs auteurs raisonnent dans une rationalité tout à fait pragmatique – et usuelle dans la vie de tous les jours. Pour l'argument A, le fait de ne pas trouver de contre-exemple suffit à établir le vrai et, pour l'argument B, la vérité mathématique n'est pas dichotomique, le principe du tiers exclu ne fonctionne pas dans la rationalité quotidienne.

D'autres travaux complètent ceci, par exemple Deloustal-Jorrand (2004) a montré qu'une conception causale-temporelle de l'implication était toujours présente chez les étudiant·es en fin d'université et chez les professeur·es débutant·es. En effet, pour certains étudiant·es, l'implication « $A \Rightarrow B$ » est comprise comme « A est la cause de B ». De cette interprétation découle souvent la suivante « A est l'unique cause de B ». Et, comme dans le monde physique, la cause précède l'effet, cela amène souvent à l'interprétation « A précède B ». Avec cette interprétation-là de l'implication, il devient très difficile d'accepter que B soit une condition nécessaire pour A dans la phrase « $A \Rightarrow B$ ». Ces interprétations de l'implication sont en partie dues à une assimilation de l'implication mathématique avec l'implication de la logique naturelle, mais sont aussi renforcées par le langage utilisé par les enseignant·es du secondaire et certains manuels. En effet, en France, avant l'université, les connecteurs logiques sont remplacés par des expressions de la langue courante. Ainsi, la phrase « $A \Rightarrow B$ » est parfois traduite par « Si A est vrai alors B est vrai », « B est la conséquence de A » ou « On a B dès qu'on a A » dans les manuels (Deloustal-Jorrand, 2004). Ces formulations portent avec elles une connotation de relation de cause à conséquence et de temporalité. Ces interprétations sont ainsi un obstacle à la compréhension de l'implication et, en particulier, de ce qu'est une condition nécessaire. Par exemple, après quatre années de formation en mathématiques à

5. Nous ne ferons pas ici de différence entre les expressions « rationalité quotidienne » et « logique naturelle » utilisées par les différents auteurs.

l'université, Sarah traduit « M est une condition nécessaire pour T » (c'est-à-dire $T \Rightarrow M$) par « pour moi (...) cela signifie que, nécessairement on doit avoir M pour avoir T , et donc M implique T » (Deloustal-Jorrand, 2004). Cette difficulté à comprendre ce qu'est une condition nécessaire, déjà montrée par Rolland (1999), est toujours très présente chez les professeur·es stagiaires bien qu'ils et elles soient nombreux·ses à connaître la table de vérité de l'implication.

La première situation que nous allons présenter *Deux tableaux* permet une explicitation de ce qu'il faut comprendre de l'implication pour distinguer son fonctionnement dans la vie de tous les jours de celui qui est attendu en mathématiques, et qui relève de la logique.

Nous mentionnons, par ailleurs, une autre situation, *Circuit* (Legrand, 1990) qui, en poursuivant l'explicitation de la distinction entre ces deux rationalités – qui inévitablement fonctionnent simultanément dans la classe – permet la construction progressive d'un cadre de référence pour le raisonnement mathématique. Cette situation de *Circuit* permet également de mettre en place ce contrat spécifique du *débat scientifique*, aussi bien au niveau de l'université, que du lycée ou du collège (Gandit & Massé-Demongeot, 1996).

Négocier un contrat didactique spécifique

Outre les questions ou problèmes au cœur du milieu de chacune de ces situations, il nous semble essentiel de mettre en place un contrat didactique d'un type particulier permettant l'engagement des étudiant·es et l'émergence de leurs conceptions. Les enseignant·es d'université interrogé·es dans l'étude rapportée en première partie donnent peu d'éléments par rapport au contrat mis en place. Il semble cependant que la plupart d'entre eux donnent une grande place à l'aspect syntaxique de la preuve au détriment de l'aspect sémantique. Or le contrat didactique nous semble un atout important à négocier pour faire vivre davantage cette dimension sémantique dans les cours, quel qu'en soit le niveau. Nous proposons un contrat dont les fondements se retrouvent dans ce que Legrand (1993) nomme *le débat scientifique en cours de mathématiques*. Nous dirons seulement *le débat* dans la suite. Il s'agit d'une forme d'enseignement, dont une des caractéristiques est de faire fonctionner la classe (ce terme désigne dans toute la suite aussi bien un groupe d'étudiant·es ou d'élèves ou d'enseignant·es en formation...) comme une mini-communauté scientifique dont les membres s'engagent dans la recherche de ce qui est vrai, acceptent d'être mis en position de doute scientifique, formulent, en toute sincérité, des conjectures – des énoncés qu'ils pensent vrais –, donnent leur avis argumenté sur la pertinence et la vérité de celles qui sont proposées par d'autres. L'erreur a ici un statut scientifique et permet d'avancer dans la recherche de la vérité. La recherche se fait individuellement d'abord, puis avec le voisinage, mais l'essentiel se joue en classe entière. La vérité mathématique retrouve une dimension sociale, en ce sens qu'un résultat, même s'il est vrai, ne

sera accepté par la classe que si son auteur·e en donne une preuve convaincante. *Le débat* donne ainsi toute sa place, à la fois au processus de preuve et à son aspect sémantique, sous ses fonctions d'explication et de validation. Pendant cette phase de travail scientifique « en direct », le rôle de l'enseignant·e est de gérer la circulation de la parole, de solliciter la classe pour que chacun·e donne son avis, de veiller à la compréhension de ce qui se dit, d'organiser la mémoire de la classe en utilisant le tableau, mais pas d'intervenir sur le plan scientifique. L'enseignant·e reste neutre sur la vérité de ce qui se dit, tout en exerçant toutefois une vigilance épistémologique sur ce qui est en jeu. À la suite de cette phase de travail mathématique « en direct », l'enseignant·e reprend la main en tant qu'expert·e et institutionnalise les connaissances en jeu.

L'hypothèse sous-jacente qui permet la négociation de ce type de contrat est que « [...] si le questionnement [...] est important et sincère, il va permettre la vie dans la durée de la classe de problématiques scientifiques indispensables à la constitution du sens » (ibid., p. 131). C'est bien la construction du sens des connaissances visées qui est l'objectif principal de l'enseignant·e dans ce contrat. L'utilisation de ce contrat en formation des professeur·es nous paraît pertinente en ce qu'il va nous permettre de travailler des aspects sémantiques aussi bien que syntaxiques.

Travailler différentes dimensions de la preuve grâce à ce contrat

Dans la phase de travail scientifique « en direct », la preuve est essentiellement travaillée sous sa dimension de processus et sous son aspect sémantique, avons-nous déjà écrit. Cette phase laisse en effet toute sa place aux modes de pensée décrits par Alcock (2008) : l'instanciation, la pensée créative et la pensée critique. Tout d'abord chaque membre de la mini-communauté scientifique est amené à entrer dans la compréhension de l'énoncé donné à l'étude – la plupart du temps, une conjecture, donnée comme point de départ par l'enseignant·e ou par un autre membre, ou encore directement un problème – en examinant les objets en jeu, prenant des exemples. On retrouve ainsi l'instanciation. Ensuite l'étude des conjectures force à adopter de prime abord ce que nous appelons « le point de vue du faux », autrement dit à se demander d'abord si telle conjecture qui est proposée ne serait pas fautive, avant de s'engager éventuellement dans une preuve qu'elle est vraie. Outre la pensée critique, dont il s'agit là, la citation suivante illustre également la pensée créative.

Un des enjeux du débat est [...] de faire découvrir à chacun qu'à partir du moment où l'on n'inhibe pas ses facultés imaginatives et créatrices [...], on a des idées personnelles, mais qu'une idée scientifique spontanée n'est pour ainsi dire jamais immédiatement satisfaisante et totalement exacte ; elle doit être « travaillée » et soumise à l'épreuve de la recherche de preuves et de contre-exemples (Legrand, 1993, p. 132).

Les dimensions syntaxiques et de produit fini de la preuve ne sont cependant pas absentes de ce mode d'enseignement. Elles apparaissent particulièrement dans les phases de conclusion et d'institutionnalisation. Mais outre les définitions et résultats mathématiques reconnus institutionnellement, qui se dégagent, de manière contextualisée, du travail mathématique en direct, l'institutionnalisation prend également en charge ce que Legrand (p. 132) nomme des « méta-connaissances », comme, par exemple, la reconnaissance de résultats faux qui ont été en jeu dans le débat, avec la preuve qu'ils sont faux. Nous allons plus loin sur le plan de l'institutionnalisation en reconnaissant avec Douady (1986) la nécessité de deux types d'institutionnalisation, la première une « institutionnalisation locale » (ibid., p. 17) où certains éléments (objets, pratiques, résultats) qui ressortent de la phase de travail mathématique « en direct » sont explicitement formulés dans le contexte du problème étudié, la seconde, différée, que nous qualifions de *globale*, où les connaissances d'ordre I et d'ordre II, y compris les savoirs pratiques et heuristiques, sont explicités de façon décontextualisée. Ce n'est en effet, qu'à la suite de la résolution de plusieurs problèmes, mettant en jeu ces connaissances, que cette institutionnalisation globale prendra son sens.

Un point sur les situations qui vont être présentées

Notre choix de présenter, dans ce texte, deux situations de formation des enseignant·es débutant·es extraites de séquences différentes, a été guidé par le fait qu'elles reposent sur des choix didactiques communs et qu'elles se complètent dans leurs objectifs. Toutes deux s'appuient sur l'utilisation du débat scientifique pour faire émerger des manques, distinguer rationalités mathématique et quotidienne et travailler particulièrement l'aspect sémantique de la preuve. En outre, il nous semble essentiel que les étudiant·es vivent ce contrat en tant qu'élèves afin de pouvoir se l'approprier comme un outil qu'ils et elles pourront mettre en œuvre dans leurs propres classes. Ce contrat nous paraît donc un outil qui pourrait leur permettre d'affronter la deuxième discontinuité de Klein. De plus, ces situations visent, toutes les deux, la construction du sens du concept d'implication. La première, *Deux tableaux*, questionne la vérité d'implications données et permet d'aborder plus largement l'entrée dans la rationalité mathématique. La seconde, *Rectangles de 4 couleurs*, met en jeu l'implication dans la résolution d'un problème.

Cependant, si la situation des *Rectangles de 4 couleurs* a vocation à être transposée dans le second degré, la situation *Deux tableaux* n'est, en revanche, pas conçue pour la classe.

Par ailleurs, les deux situations ne sont pas présentées de la même façon. La mise en œuvre de la première est décrite en détails alors que nous nous appuyons sur la seconde pour mettre en avant des critères génériques pour une situation de formation à la preuve.

Enfin, elles ont toutes deux été mises en œuvre de nombreuses fois, montrant ainsi la robustesse de ce qu’elles produisent et des possibilités qu’elles offrent en terme de formation.

Situation de formation : *Deux tableaux*

En nous appuyant sur les points soulevés dans la partie précédente, nous choisissons de construire une formation des professeur·es qui mette en lumière la quantification universelle implicite et qui permette de questionner l’implication mathématique en montrant les différences avec la logique naturelle, et en particulier en remettant en cause la conception *causale-temporelle* de l’implication. Pour les raisons évoquées plus haut, le débat scientifique est au cœur de notre formation. L’analyse *a priori* est décrite ci-dessous en deux parties, l’analyse mathématique et didactique des supports puis la mise en œuvre de la situation.

Analyse mathématique et didactique de *Deux Tableaux*

La situation présentée ci-dessous a été testée de nombreuses fois depuis 2004 auprès d’un public de professeur·es débutant·es (Deloustal-Jorrand, 2004, 2017).

Soit $k \in \mathbb{N}$,	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a) k pair \Rightarrow $k+1$ pair			
(b) k pair \Rightarrow $k+1$ impair			
(c) k impair \Rightarrow $k+1$ pair			
(d) k impair \Rightarrow $k+1$ impair			

Figure 1. – Tableau 1 vierge

	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a') 3 pair \Rightarrow 4 pair			
(b') 3 pair \Rightarrow 4 impair			
(c') 3 impair \Rightarrow 4 pair			
(d') 3 impair \Rightarrow 4 impair			

Figure 2. – Tableau 2 vierge

Faire émerger des manques sur la compréhension de l'implication : analyse du tableau 2

Nous commençons notre analyse par le tableau 2 qui nous permet, en nous appuyant sur la table de vérité du connecteur implication, de rappeler que celle-ci n'est fausse que dans un seul cas : lorsque sa prémisse est vraie et sa conclusion fausse. L'implication est donc vraie dans les trois autres cas et, en particulier, dès lors que la prémisse est fausse. La réponse mathématique correcte au deuxième tableau est donc la suivante :

	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a) 3 pair \Rightarrow 4 pair	X		
(b) 3 pair \Rightarrow 4 impair	X		
(c) 3 impair \Rightarrow 4 pair	X		
(d) 3 impair \Rightarrow 4 impair		X	

Figure 3. – Tableau 2 : réponse mathématique correcte

L'implication n'est fausse que pour la phrase (d') dont la prémisse (3 impair) est vraie et dont la conclusion (4 impair) est fausse.

Dans cette situation, les propositions ont été choisies de telle manière que leur valeur de vérité soit connue (on sait que « 3 est pair » est une phrase fausse) afin que les débats puissent se concentrer sur la valeur de vérité de l'implication. Notre expérimentation (Deloustal-Jorrand, 2004) et nos expériences de formation ont montré que l'on pouvait attendre trois types de réponses majoritaires (voir figure 4) basées sur différents arguments, que nous détaillons ci-dessous.

	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a) 3 pair \Rightarrow 4 pair	X	X X	
(b) 3 pair \Rightarrow 4 impair	X X	X	
(c) 3 impair \Rightarrow 4 pair	X X X		
(d) 3 impair \Rightarrow 4 impair		X X X	

Figure 4. – Tableau 2 : les trois réponses majoritaires

Premier type de réponse (noire : V, V, V, F) : réponse correcte basée sur la table de vérité de l'implication.

Deuxième type de réponse (bleue : F, F, V, F) : les justifications sont appuyées par deux arguments :

- (a') et (b') sont fausses car « 3 pair » est faux
- (a') et (d') sont fausses car deux nombres consécutifs ne peuvent avoir la même parité.

Ce dernier argument est pour nous un indice d'une conception causale de l'implication : une implication est fautive si l'on n'a pas un lien de cause à effet entre la prémisse et la conclusion.

Troisième type de réponse (rouge : F, V, V, F) : les justifications sont appuyées essentiellement sur l'argument que deux nombres consécutifs ont des parités différentes. La phrase (b') est considérée vraie car « si on considère que 3 est pair, alors 4 qui est le suivant sera impair ».

D'autres réponses peuvent combiner ces arguments et parfois s'appuyer sur d'autres tels que :

- (b') est vraie car sa contraposée « 4 pair \Rightarrow 3 impair » est vraie.
- on ne peut pas savoir si (b') est vraie, cela dépend si on considère que 3 est pair ou non.

Faire émerger un manque sur la pratique de la quantification universelle implicite : analyse du tableau I

L'expression « soit $k \in \mathbb{N}$ » est volontairement ambiguë. Elle peut être interprétée par « quel que soit l'entier k » ou par « soit un nombre entier k quelconque fixé mais que je ne connais pas ».

La première interprétation amène une lecture des implications comme étant universellement quantifiées, par exemple pour la phrase (a) « $\forall k \in \mathbb{N}, k \text{ pair} \Rightarrow k+1 \text{ pair}$ ». Celles-ci sont alors fausses dès lors qu'il existe un contre-exemple. Ainsi la phrase (a) (resp. (d)) est fautive puisque l'entier 2 (resp. 3) est un contre-exemple. Les phrases (b) et (c) sont vraies.

La seconde interprétation, « k est un entier fixé que je ne connais pas », ne permet pas de conclure sur la validité de certaines des phrases. En effet, suivant la valeur de k , certaines sont parfois vraies ou parfois fausses. Par exemple, la première phrase est vraie pour $k = 3$ (puisque sa prémisse est fautive) mais fautive pour $k = 2$ (puisque sa prémisse est vraie mais sa conclusion fautive). La réponse est donc « on ne peut pas savoir » pour les phrases (a) et (d) dont la validité dépend de la parité de k . En revanche, la deuxième phrase est vraie

quelle que soit la parité de k . Par exemple, elle est vraie pour $k = 3$ (puisque sa prémisse est fautive) et vraie aussi pour $k = 2$ (puisque sa prémisse et sa conclusion sont vraies). On peut donc répondre que les phrases (b) et (c) sont vraies.

La figure 5 illustre en rouge les réponses suivant la première interprétation et en noir suivant la deuxième (k fixé).

Soit $k \in \mathbb{N}$,	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a) k pair \Rightarrow $k+1$ pair		X	X
(b) k pair \Rightarrow $k+1$ impair	X X		
(c) k impair \Rightarrow $k+1$ pair	X X		
(d) k impair \Rightarrow $k+1$ impair		X	X

Figure 5. – Réponses correctes selon l'interprétation choisie

Ces deux réponses sont mathématiquement correctes selon l'interprétation de l'expression « Soit $k \in \mathbb{N}$ » que l'on choisit. Nos nombreuses expériences en formation des professeurs nous ont montré que l'interprétation universellement quantifiée (première interprétation en rouge) est très largement majoritaire et même souvent l'unique réponse proposée. Cette observation va bien dans le sens des résultats de Durand-Guerrier (1999).

Des choix de mise en œuvre de la situation *Deux tableaux*

Travail individuel avant la phase de débat

Avant la phase collective, il y a nécessité d'un travail individuel permettant à chacun de s'appropriier la situation et s'engager dans l'argumentation (Legrand, 1993). Ceci permet d'enrichir le débat des différents points de vue. Nous inscrivons ensuite au tableau les différentes réponses et arguments. L'étonnement dû à la diversité des propositions provoque naturellement les échanges entre les étudiant·es.

Ordre des tableaux

Sur la fiche individuelle, le tableau 1 est suivi du tableau 2 car le tableau 1 ne pose, en général, pas de difficultés et met en confiance. Nous gardons ce même ordre pour recueillir les réponses. Cependant, nous choisissons de lancer le débat d'abord sur le deuxième tableau pour pouvoir d'abord travailler sur l'implication avant de travailler sur la quantification universelle implicite. Comme, en général, il y a accord (ou quasiment) sur les réponses au premier tableau et que le désaccord n'est flagrant que pour le deuxième, cette décision paraît naturelle.

Appui sur une réponse particulière (fictive ou non)

Après une institutionnalisation portant sur des aspects épistémologiques et didactiques de l'implication (Deloustal-Jorrand, 2017), se dégage un accord sur le deuxième tableau. Pour lancer le débat sur le premier tableau, nous prenons appui sur la réponse suivante, en la proposant si elle n'est pas déjà apparue.

« Le deuxième tableau est un cas particulier du premier, je reprends mes résultats au premier avec $k = 3$ »

	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir
(a') 3 pair \Rightarrow 4 pair		X	
(b') 3 pair \Rightarrow 4 impair	X		
(c') 3 impair \Rightarrow 4 pair	X		
(d') 3 impair \Rightarrow 4 impair		X	

Figure 6. – Réponse particulière au tableau 2

Cette justification paraît convaincante aux étudiant·es, pourtant ils et elles savent maintenant que cette réponse au tableau 2 est fautive. La question est donc de comprendre pourquoi on ne peut pas réutiliser le tableau 1 en prenant $k = 3$. Cette réponse particulière permet de questionner le sens qu'on donne aux phrases du tableau 1 et ainsi de mettre au jour la quantification universelle sous-jacente. En effet, lorsqu'on déclare la première phrase fautive dans le premier tableau, c'est parce qu'il existe des contre-exemples et donc qu'elle n'est pas tout le temps vraie mais cela n'entraîne pas qu'elle est tout le temps fautive. En particulier, elle est vraie dans le cas $k = 3$. Par contre, lorsqu'on déclare la deuxième phrase vraie dans le tableau 1 c'est parce qu'elle n'a pas de contre-exemple et donc qu'elle est tout le temps vraie. Elle est donc vraie aussi pour $k = 3$.

Des éléments d'analyse a posteriori

Travail autour des manques sur l'implication

Notre expérience de formation montre que les débats sont nombreux autour du deuxième tableau. En effet, les arguments liés à la table de vérité sont souvent très maladroitement énoncés par les étudiants : « parce qu'on l'a vu en licence », « parce que le faux entraîne le vrai », « parce qu'avec le faux, on peut avoir n'importe quoi ». Ces connaissances sur les tables sont souvent partagées par les étudiant·es mais en restent à l'aspect syntaxique, sans avoir été problématisées. Nous faisons l'hypothèse que le choix prédominant, vu en première partie, des enseignant·es d'université de mettre en avant un point de vue syntaxique sur les connaissances logiques empêche les étudiant·es de faire le lien

avec l'utilisation de l'implication dans les raisonnements. Les arguments cités ci-dessus paraissent assez contre-intuitifs aux autres étudiant·es et ne les convainquent pas la plupart du temps. Le débat permet alors d'interroger les choix faits pour la table de vérité de l'implication. De plus, cela permet de faire la différence d'une part entre vérité de la prémisse, vérité de la conclusion et vérité de l'implication et, d'autre part, entre vérité d'une implication et validité d'un raisonnement.

Une autre question qui fait toujours débat est de savoir si l'on peut s'appuyer ou non sur le fait que « 3 est pair » est faux ou si l'on doit imaginer que cela pourrait être vrai. Cela nous permet de rappeler, en lien avec la table de vérité, que la valeur de vérité du connecteur implication ne dépend que des valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion et de la définition du connecteur.

Enfin, l'argument « deux nombres entiers consécutifs doivent avoir des parités différentes » est un argument qui ressort souvent. Cela nous permet d'insister sur la différence entre implication et lien de cause à effet et de contrer la conception *causale-temporelle* de l'implication. Cela permet aussi de mettre en lumière la différence entre logique mathématique et logique naturelle.

Travail autour des manques sur la quantification universelle implicite

La réponse particulière apportée permet effectivement de questionner l'interprétation du premier tableau. Ce débat est souvent très perturbant pour les étudiant·es qui l'ont interprété avec une quantification universelle. En effet, ceci leur est tellement naturel qu'ils et elles n'en ont pas conscience et ont du mal à l'explicitier. Leurs arguments sont d'abord du type « dans le premier tableau, on ne sait pas si k est pair ou impair » puis « je suppose ici que la prémisse est vraie » puis « si c'est faux, ça ne veut pas dire que c'est tout le temps faux », cela amène, en général au bout d'un temps long, quelqu'un à dire « on suppose que la phrase, c'est pour tous les k entiers ». Ainsi, on explicite la quantification universelle et l'on comprend pourquoi l'instanciation de k ne fonctionne pas. On explicite aussi le fait que pour montrer qu'une implication universellement quantifiée est vraie, on se contente d'étudier le cas où la prémisse est vraie, puisqu'on sait que l'implication est vraie quand la prémisse est fausse.

Au-delà de cette situation

Autour de cette situation, nous choisissons aussi de travailler sur les conditions nécessaires et suffisantes et sur la négation de l'implication et des quantificateurs (Deloustal-Jorrand, 2017). Nous prenons soin de laisser une grande place à l'analyse de situations pour la classe.

Maîtrisant mieux l'implication, les étudiant·es sont plus à l'aise pour l'enseigner. Ils et elles peuvent anticiper les erreurs des élèves liées à la logique naturelle et en particulier à la conception *causale-temporelle*. Ils et elles ont des pistes pour changer leurs pratiques en explicitant la quantification universelle dans leur classe. Ils et elles ont des critères didactiques pour analyser les situations proposées par les manuels ou la recherche. Enfin, ils et elles ont vécu une situation qui leur permet de comprendre l'intérêt de problématiser une connaissance et d'organiser un débat pour favoriser l'apprentissage.

Seconde situation de formation : Rectangles de 4 couleurs

Cette situation, *Rectangles de 4 couleurs*, repose sur la résolution d'un problème, généré par un problème de la recherche contemporaine en mathématiques discrètes (Da Ronch et al., 2020). En cela, elle se place dans la lignée des *Situations de Recherche pour la Classe* (Grenier et Payan, 2002) et s'inscrit dans un des courants du Problem Solving en Éducation Mathématique, comme les décrit Castela (2011). Cette auteure affirme, s'appuyant sur Resnick (1988, p. 58 cité dans Castela, 2011), que l'objectif premier de cette approche est, non pas l'acquisition d'un savoir mathématique fait de concepts et de théorèmes, mais de faire entrer dans une approche mathématique du monde, mettant l'accent sur la construction du « sens de ce qui est et ce qui n'est pas mathématique du point de vue des outils, des pratiques et des valeurs sociales » (p. 10) et de « s'approprier des gestes du penser mathématique » (p. 11). Cet objectif est tout à fait en accord avec les principes du débat scientifique que nous avons explicités ci-dessus. C'est la raison pour laquelle, nous proposons une situation composée d'un problème de ce type et gérée en débat.

Nous présentons d'abord le problème puis nous mettons en évidence l'aspect générique de cette situation, choix du problème et de la mise en œuvre, pour une situation de formation à la preuve. Nous explicitons pour cela des critères relatifs à la constitution de son milieu (choix des apprentissages visés, des consignes, du matériel) et au contrat didactique, différent selon qu'il régit une phase de recherche, de débat ou d'institutionnalisation.

Présentation du problème

Nous appelons *tuile de Wang à quatre couleurs* un carré (unitaire) partagé par ses diagonales en quatre secteurs triangulaires, chacun d'eux étant coloré en une couleur différente : rouge, vert, jaune, bleu. On cherche à paver des rectangles à bords colorés avec ces tuiles en respectant la règle d'assemblage suivante : les bords colorés en contact sont de la même couleur, que ce soit les bords de deux tuiles consécutives ou un bord d'une tuile et un bord du rectangle (figure 7).

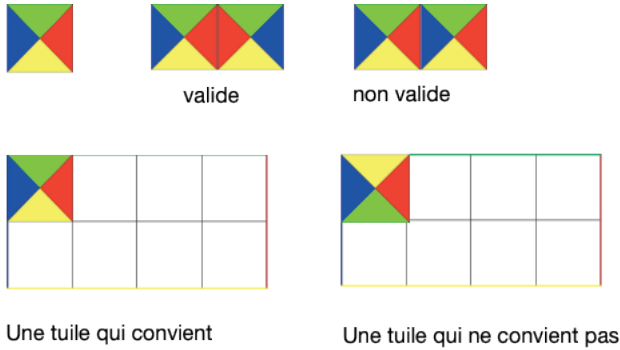


Figure 7. — Rectangles de 4 couleurs : assemblages et pavages valides ou non valides.

Ainsi, comme le montre la figure 7, les bords Nord et Ouest du rectangle étant respectivement vert et bleu, on ne peut poser une tuile dans le coin en haut à gauche, que si ses bords Nord et Ouest sont aussi respectivement vert et bleu. La tuile présentée ci-dessus à gauche n’est qu’un élément de l’ensemble des 24 tuiles à 4 couleurs, obtenues en permutant de toutes les façons possibles les quatre triangles colorés. Chaque tuile de cette famille pouvant être répétée autant qu’on veut, on obtient ainsi une collection de tuiles, désignée par C.

Le problème peut s’énoncer ainsi de manière générale (Da Ronch et al., 2020) : quels que soient les nombres entiers naturels, supérieurs à 1, p et q , est-il possible de paver, avec des tuiles de la collection C, un rectangle $p \times q$, dont chaque bord est unicolore et de couleur différente des trois autres bords ? Les seules couleurs envisagées sont le rouge, le vert, le jaune et le bleu.

La lectrice et le lecteur sont invité·es à chercher ce problème.

En nous appuyant sur les travaux de *Maths à Modeler*, notamment Da Ronch (2022) et Gandit et al. (2023), nous complétons les critères des *Situations de Recherche pour la Classe* (Grenier & Payan, 2002). Nous illustrons cette nouvelle liste de critères grâce à notre situation et ceci nous permet de l’envisager comme un exemple générique de situation de formation à la preuve.

Des critères pour une situation de formation à la preuve

Ces critères, comme nous en avons déjà parlé, reposent sur la volonté de développer une façon mathématique d’appréhender le monde, appuyée sur des valeurs et des pratiques sociales, fonctionnant dans une rationalité dont les règles du jeu sont clairement définies.

Ils reprennent également des hypothèses (de travail) étayées par de nombreux travaux antérieurs, dont nous n'en citons ici que trois :

- H1 – Une pratique de la preuve s'apprend dans le cadre de la résolution d'un problème (Arsac, 1988), permettant de faire vivre le processus de preuve.
- H2 – Il existe des situations qui reposent sur des problèmes issus de la recherche en mathématiques discrètes, dont les analyses mathématique et didactique révèlent les potentialités concernant une pratique de la preuve avec tout public (Da Ronch & al., 2020).
- H3 – Une pratique de la preuve à partir de ces situations (ci-dessus) est difficile à mettre en œuvre en classe, concernant la dévolution et l'institutionnalisation (Hersant, 2010).

Critère 1 – Le milieu de la situation contient un problème riche sur le plan épistémologique

Le premier critère, relatif au milieu, s'appuie sur les hypothèses H1 et H2. Il énonce que le problème générateur de la situation est riche sur le plan épistémologique, autant que possible, en lien avec des problèmes de la recherche actuelle en mathématiques discrètes (Gravier & Ouvrier-Buffet, 2022 ; Grenier & Payan, 2002). Cette richesse épistémologique garantit l'existence d'un enjeu de vérité nécessaire à la mise en route du processus de preuve, ainsi que la possibilité de développer l'aspect sémantique de la preuve, et ceci d'autant plus que les objets en jeu sont simples d'accès au départ. Le rapport Villani et Torossian (2018, p. 36) évoque également les mathématiques discrètes comme champ pertinent pour l'apprentissage du raisonnement grâce à des problèmes motivants. En jouant sur les différentes variables de recherche, on pourra, en effet, choisir des valeurs qui permettront d'obtenir des instances du problème motivantes et didactiquement intéressantes.

C'est le cas de *Rectangles de 4 couleurs* (Da Ronch, 2022), issu d'un problème plus général – le problème de Wang – qui consiste à se demander s'il est possible de paver le plan entier avec une collection donnée de tuiles. Pour construire notre problème, nous avons fait des choix concernant certaines variables de recherche comme la nature de l'espace à paver (rectangles avec bords unicolores de 4 couleurs) et la composition de la collection de tuiles. On laisse libre le choix de la taille des rectangles et on pourrait aussi laisser libre le choix du nombre de couleurs des bords des rectangles. L'existence de variables de recherche fait du problème un bon candidat pour développer une activité de recherche et de preuve.

Divers travaux ont ainsi conduit à l’élaboration de problèmes utilisables en formation ou dans l’enseignement à partir de problèmes de la recherche en mathématiques discrètes : *La chasse à la bête* (Ouvrier-Buffet, 2017), *La roue aux couleurs* (Godot, 2006), *Les caisses de dynamite* (Gandit et al., 2013), *Le carrelage de la salle de bains* (Gandit, 2008).

Critère 2 – Des connaissances d’ordre II et des savoirs heuristiques et pratiques, bien identifiés, sont principalement visés

C’est une analyse mathématique et didactique fine qui permet d’identifier la pluralité des stratégies de résolution envisageables et, par suite de dégager des connaissances d’ordre II, ainsi que les savoirs pratiques et heuristiques qui sont en jeu. Le jeu de l’enseignant·e sur certaines variables – qui deviennent alors des variables didactiques – va donner lieu à des instances et des questions permettant de travailler plus particulièrement telle ou telle connaissance d’ordre II ou tel ou tel savoir heuristique et pratique, qu’il ou elle aura préalablement choisis. Ces connaissances devront se révéler des *outils* pour la résolution du problème (Douady, 1986).

Pour illustrer ceci avec *Rectangles de 4 couleurs*, supposons que l’on vise la compréhension de la nécessité : la vérité ne peut être autre. La nécessité est au cœur de la preuve d’une impossibilité, particulièrement lorsqu’il s’agit de prouver qu’il est matériellement impossible d’exécuter une tâche telle que fabriquer un objet satisfaisant certaines conditions (Weil, 1949) : « L’impossibilité est la forme concrète de la nécessité » (p. 52). Considérons le rectangle 1×4 , à bords unicolores, vert au Nord, jaune au Sud, Bleu à l’Ouest et rouge à l’Est, qu’on cherche à paver avec des tuiles de la collection C (figure 8).

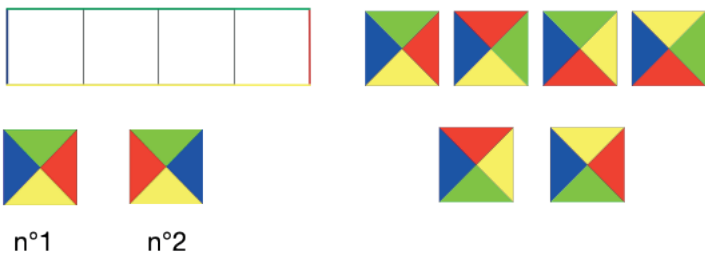


Figure 8. – Un rectangle 1×4 à quatre couleurs, six tuiles qui permettent de générer la collection C

Considérons qu’on cherche à paver le rectangle 1×4 , en commençant par la gauche. On n’a pas d’autre choix que de poser tout à gauche dans le rectangle, la tuile n° 1 (figure 8) (avec son bord Est rouge), ensuite, si l’on poursuit de proche en proche, la tuile n° 2 (figure 8) (avec son bord Est bleu), puis à nouveau la tuile n° 1. Il est alors impossible

de terminer le pavage, de manière valide, parce qu'on devrait poser une quatrième tuile possédant ses deux bords Ouest et Est rouges et qu'aucune tuile de la collection C ne possède cette propriété. Ce raisonnement par forçage montre ainsi qu'il est impossible de fabriquer un pavage valide du rectangle 1×4 de la figure 8.

Par ailleurs, en construisant le pavage précédent du rectangle 1×4 de la figure 8, il est apparu un pavage valide du rectangle 1×3 . Ainsi si l'on vise une autre connaissance d'ordre II selon laquelle il suffit d'exhiber un exemple (ici exécuter un pavage valide) pour prouver la possibilité, mais qu'une preuve empirique est insuffisante pour prouver l'impossibilité et qu'il y faut une preuve par un raisonnement, on est assuré que cette connaissance fonctionne comme un outil si l'on propose *Rectangles de 4 couleurs* avec, par exemple, une des dimensions des rectangles fixée à 1.

Critère 3 – La possibilité de manipuler des objets réels et la simplicité de la formulation de la consigne initiale sont des éléments importants du milieu de la situation

Si les tâches d'exécution, évoquées ci-dessus, sont des preuves empiriques suffisantes de la possibilité, il faut qu'elles soient appelées par la formulation de la consigne (le rectangle est-il pavable ?). Autrement dit la formulation du problème porte sur des objets directement représentables par des objets matériels, le questionnement peut se transposer en l'exécution d'une tâche simple avec ce matériel. Le choix du cadre des mathématiques discrètes rend aisée cette représentation d'une question mathématique par l'exécution d'une tâche matérielle. Par ailleurs l'entrée dans le problème est facilitée par la prise de conscience que certaines tâches sont exécutables, alors que d'autres résistent, et la recherche des raisons afférentes.

Concernant *Rectangles de 4 couleurs*, il est utile de mettre à disposition des dessins de rectangles quadrillés à bords colorés, de différentes dimensions, dont certains sont pavables et d'autres non, ainsi qu'une collection de tuiles matérialisées, de la taille des mailles du quadrillage des rectangles, dont chaque tuile est répétée en nombre suffisant. La question du pavage est directement transposable en recouvrement du rectangle sans superposition des tuiles.

Critère 4 – La recherche du problème est gérée sous la forme d'un débat scientifique

Ce critère est relatif au contrat didactique. La résolution du problème est travaillée de manière collaborative, dans le cadre d'une mini-communauté scientifique. L'enseignant·e ne désigne pas les méthodes de résolution. Son rôle est d'observer les actions scientifiques

des élèves du type *Expérimenter, Généraliser, Questionner, Communiquer* (Chanudet et al., 2019, p. 456), de saisir les idées intéressantes pour l'avancée dans la résolution, afin de faire en sorte qu'elles soient communiquées à la communauté, sous la forme de conjectures qui s'avéreront vraies ou fausses. Concernant les autres facettes du rôle de l'enseignant·e, nous renvoyons au paragraphe sur le débat scientifique.

Critère 5 – L'arrêt de la résolution du problème est décidé par l'enseignant·e

Tout au long de la phase de travail mathématique « en direct », le rôle de l'enseignant·e est aussi d'exercer sa vigilance par rapport aux objectifs d'apprentissage préalablement fixés. Or une question résolue pouvant amener à se poser de nouvelles questions, la résolution du problème pourrait se poursuivre, elle s'arrête au moment décidé, sans que nécessairement le problème ne soit résolu complètement. Cette décision est guidée par l'objectif premier qui est la mise en œuvre de connaissances précises relatives à la preuve, et non pas l'achèvement de la résolution du problème.

Ainsi, nos expérimentations montrent que, même avec un public très jeune (10-11 ans), l'étude des rectangles à bords colorés de type 1×4 , 1×5 , 1×6 , $1 \times 7 \dots$ amène à généraliser avec des rectangles de largeur 1 et de longueur quelconque n : formulation et preuve d'une condition suffisante, d'une condition nécessaire, portant sur n , pour qu'il existe un pavage valide de tels rectangles. Autrement dit, l'étude de ces rectangles de largeur 1 amène à des exécutions de pavages, des preuves d'impossibilité, qui permettent l'apprentissage de ce que sont une condition nécessaire et une condition suffisante.

Critère 6 – Une phase de conclusion et d'institutionnalisation a lieu à partir de la résolution effectuée du problème

L'institutionnalisation porte sur les connaissances d'ordre II ou les savoirs heuristiques et pratiques, choisis au départ, dans le contexte du problème. Elle est précédée d'une phase de conclusion récapitulant les résultats trouvés, qui peut être prise en charge par la classe. Par contre l'institutionnalisation revient à l'enseignant·e.

Si l'on reprend l'exemple des expérimentations mentionnées ci-dessus, outre les notions de condition nécessaire et de condition suffisante, l'institutionnalisation pourra aussi porter, suivant l'histoire de la classe, sur des connaissances relatives à la conduite de la recherche, comme, par exemple, le fait qu'on a abordé ce problème en étudiant divers cas particuliers, ce qui a permis de dégager ce qui est généralisable et de formuler une conjecture.

Suivant notre hypothèse H3, citée ci-dessus, renforcée par nos expérimentations récentes (Gandit et al., 2023), il est extrêmement difficile pour un·e enseignant·e du premier ou

du second degré de mettre en place ces phases de conclusion et d'institutionnalisation. D'où la nécessité de prendre ceci en charge dans la formation.

Dans cette partie, nous avons présenté une situation pertinente pour la formation des futur·es enseignant·es car :

- elle permet de faire émerger des manques théoriques en logique du fait de l'absence de routinisation des gestes de la recherche (par exemple sur les conditions nécessaires) ;
- elle permet de mettre en lumière les critères ci-dessus qui sont explicités lors de l'institutionnalisation avec les professeur·es ;
- elle constitue une ressource utilisable dans leurs classes puisque ces critères ne sont pas spécifiques d'une situation destinée à un public de niveau donné.

Conclusion et perspectives

La pratique des mathématiques ne suffit donc pas toujours pour acquérir les connaissances en logique nécessaires pour manipuler correctement le langage mathématique et pour produire des preuves valides. Les difficultés constatées chez de nombreux·es étudiant·es à l'arrivée à l'université sont souvent prises en charge dans des cours orientés vers l'apprentissage de la démonstration. Nos analyses d'entretiens conduits avec des enseignant·es de différentes universités montrent à la fois des similitudes et des différences dans les choix de contenu de ces cours. Il ressort de ces entretiens que c'est l'aspect syntaxique des connaissances de logique qui est le plus souvent mis en avant. Ce choix ne paraît pas didactiquement questionné par les enseignant·es interrogé·es. Nos travaux pourraient ainsi avoir un objectif de partage des différentes expériences universitaires, permettant à chacun·e de préciser ses choix et de les enrichir. Une suite à cette recherche pourrait être d'évaluer les effets de ces choix d'enseignement sur les apprentissages des étudiant·es. Nous souhaiterions catégoriser les effets de ces cours et les mettre en lien avec les choix de contenu et d'approche. Pour cela, nous projetons de construire un questionnaire permettant d'évaluer les connaissances des étudiant·es selon différents aspects : syntaxe / sémantique, processus / produit, fonction d'explication / fonction de validation, logique mathématique / logique naturelle. Il pourrait être proposé à l'ensemble des étudiant·es de ces différents cours.

Par ailleurs, au lycée, la logique mathématique est revenue dans les programmes depuis 2009. Dans cet article, nous avons présenté des situations de formation autour de la logique et de la preuve, proposées aux futur·es enseignant·es pour mettre au jour la nécessité de préciser leurs connaissances en logique, pour leur propre activité, mais aussi pour enseigner les attendus du programme. Ces situations permettent de questionner

l'implication et son utilisation dans les preuves sous différents aspects mais elles doivent être accompagnées d'apports :

- mathématiques : définition de l'implication, condition nécessaire/suffisante, équivalence de $A \Rightarrow B$ et $\text{Non } A$ ou B , types de raisonnements...
- didactiques : conception causale-temporelle, quantification implicite de l'implication, différence entre logique mathématique et logique naturelle...
- professionnels : analyse et adaptation pour la classe de ressources issues de manuels ou d'articles, analyse de productions d'élèves, intérêt pour l'apprentissage du questionnement et du débat, importance de l'institutionnalisation de connaissances sur la logique et sur la preuve...

À ces conditions, il nous semble qu'elles permettent aux futur·es enseignant·es de construire des compétences professionnelles leur permettant de faire face à la seconde discontinuité de Klein concernant la logique et la preuve.

Comme pour les cours d'initiation à la preuve au début de l'université, les choix faits pour parler de logique et de preuve dans la formation des enseignant·es du second degré diffèrent d'un Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation à l'autre. Une perspective de recherche pourrait être d'en faire un état des lieux. Et là encore, des études croisées et l'organisation d'échanges sont bénéfiques pour chacun·e. C'est ce qui a été initié lors des deux derniers séminaires de la Commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (CORFEM) autour du thème « Raisonner, prouver, démontrer... en classe et en formation » et qui mériterait d'être prolongé.

Bibliographie

- ALCOCK, L. (2008). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *CBSMS Issues in Mathematics Education*, 16, 73–100.
- ARSAC, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 247–280.
- CASTELA, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques* [Note de synthèse présentée en vue de l'habilitation à diriger des recherches, Université Denis Diderot Paris VII]. math. HO tel-00683613.

CHANUDET, M., COPPÉ, S., GANDIT, M. & MOULIN, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. Dans S. Coppé & E. Roditi (Dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, XIXème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 453-475)

CHELLOUGUI, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 29(2), 115–154.

CERCLÉ, V. (2019). Faire vivre des énoncés contingents dans la classe de mathématique : pourquoi et comment ? *Petit x*, 110-111, 27–55

DA RONCH, M., GANDIT, M. & GRAVIER, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, 121, 77-105. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03030861>

DA RONCH, M. (2022). *Pratique de l'activité mathématique en médiation : modèles didactiques et conception d'ingénieries*. [Thèse de doctorat]. Université Grenoble Alpes.

DAWKINS, P.C. & WEBER, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 123–142.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique*. [Thèse de doctorat]. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2017). Le concept d'implication en formation des professeurs du second degré. Dans Braconne-Michoux, A., Gibel, P. & Oliveira, I. (Dir), *Etude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants*. Québec : livres en ligne du CRIRES. (p.197-224) http://lel.crires.ulaval.ca/public/BraconneMichoux_Gibel_Oliveira_2017.pdf

DELOUSTAL-JORRAND, V., GANDIT, M., MESNIL, Z. & DA RONCH, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. *Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020)* (p. 378-387). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

DURAND-GUERRIER, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 50, 57-79.

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*. [Note de synthèse présentée en vue de l'habilitation à diriger des recherches]. Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S. & TANGUAY, D. (2012). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, 369-389. New-York : Springer.

GANDIT, M. & MASSÉ-DEMONGÉOT, M.-C. (1996). *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée*. IREM de Grenoble. <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR96044.htm>

GANDIT, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*. [Thèse de doctorat]. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

GANDIT, M., MODESTE, S., GRAVIER, S., BALICCO, M.-P. (2013). *Les caisses de dynamite, un atelier de recherche Maths à Modeler*. Jouer ou apprendre, Mai 2013, Chamonix, France. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021307>

GANDIT, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en Education*, 21, 67-80. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no21.pdf>

GANDIT, M., GRAVIER, S & MOSSUZ, L. (2023). L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques du cycle 1 au cycle 3 : premiers outils et premiers résultats. Dans Wozniak, F. (dir), *Actes du 48ème colloque de la COPIRELEM, Toulouse 2022*.

GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. [Thèse de doctorat]. Université Lyon 1.

GODOT, K. (2006). La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3, *Grand N*, 78, 31-53.

GRAVIER, S. & OUVRIER-BUFFET, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization—exemplification with Research Situations for the Classroom. *ZDM Mathematics Education*, 54, 925–940 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3>

GRENIER, D. & PAYAN, C. (2002). Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (189 – 204). Paris : IREM Paris 7 et ARDM.

GRUPE ADIREM/INRP DE L'IREM DE GRENOBLE (2003). A la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe. Dans J. Colomb, J. Douaire & R. Noirfalise (Dir.), *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes* (p. 13-51). INRP

HANNA, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

- HEMMI, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 271-291.
- HERSANT, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques*. Mémoire complémentaire à l'HDR. Université de Nantes. DOI: 10.13140/RG.2.2.35465.77928
- LEGRAND, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9, 3, 365-406
- LEGRAND, M. (1990). Enseigner autrement les mathématiques à l'université en Deug A première année : Circuit ou les règles du jeu mathématique, 129-161, <https://publi-math.univ-irem.fr/numerisation/WN/IWN90002/IWN90002.pdf>
- LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. *Repères-IREM*, 10, 123-159.
- MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement*. [Thèse de doctorat]. Université Paris Diderot, Paris.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2017). La chasse à la bête - Une situation recherche pour la classe, *Grand N 100*, 5-31.
- ROLLAND, J., (1999). *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. [Thèse de doctorat]. Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- SACKUR, C., ASSUDE, T., MAUREL, M., DROUHARD, J.-P. & PAQUELIER, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(1), 57-90.
- SELDEN, A. (2012). Transition and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, 391-420. New-York : Springer.
- SELDEN, J. & SELDEN, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151.
- VILLANI, C. & TOROSSIAN, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. <https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>
- WEBER, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 115-133.
- WEBER, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43:4, 463-482.
- WEIL, S. (1949). *L'enracinement : Prélude à une déclaration des devoirs envers l'être humain*. Gallimard. http://classiques.uqac.ca/classiques/weil_simone/enracinement/enracinement.html