Comment choisir des contenus mathématiques pertinents pour comprendre et surmonter la seconde discontinuité de Klein avec les futurs enseignants ? Le cas du produit scalaire

Nicolas Grenier-Boley
Normandie Univ, UNIROUEN, Université de Paris,
Univ. Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université,
Univ. Lille, LDAR, 76000 ROUEN,
nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
https://orcid.org/0000-0002-2171-8447

Les problématiques liées à la seconde discontinuité de Klein amènent nécessairement la question du choix des contenus mathématiques sur lesquels se concentrer et la manière d'envisager le recul sur l'enseignement de ces contenus dans l'enseignement secondaire. Dans cet article, nous proposons d'explorer cette problématique dans le cadre du système éducatif français pour le cas du produit scalaire. Nous nous appuyons sur des exemples qui nous semblent mettre en évidence certains enjeux importants liés à cette seconde discontinuité, que ce soit pour les chercheurs, les futurs enseignants ou les étudiants.

Mots-clés : seconde discontinuité de Klein, produit scalaire, épistémologie, formation initiale

Grenier-Boley, N. (2025). Comment choisir des contenus mathématiques pertinents pour comprendre et surmonter la seconde discontinuité de Klein avec les futurs enseignants ? Le cas du produit scalaire. *Recherches en didactique des mathématiques.* 45 (1), 33-59, https://doi.org/10.46298/rdm.13764,

How to choose relevant mathematical contents to understand and overcome Klein's second discontinuity with future teachers? The case of the scalar product

The issues related to Klein's second discontinuity necessarily lead to the question of the choice of mathematical contents on which to focus and the way to consider the teaching of these contents in secondary education. In this article, we propose to explore this issue in the context of the French educational system for the case of the scalar product. We use examples that seem to us to highlight some important issues related to this second discontinuity, whether for researchers, future teachers or students.

Keywords: Klein's second discontinuity, scalar product, epistemology, initial training

¿Cómo elegir contenidos matemáticos relevantes para comprender y superar la segunda discontinuidad de Klein con los futuros profesores? El caso del producto escalar

Los problemas relacionados con la segunda discontinuidad de Klein conducen necesariamente a la cuestión de la elección de los contenidos matemáticos en los que centrarse y a la forma de considerar la retrospectiva sobre la enseñanza de estos contenidos en la educación secundaria. En este artículo, nos proponemos explorar esta cuestión en el contexto del sistema educativo francés para el caso del producto escalar. Nos basamos en ejemplos que nos parece que ponen de manifiesto algunas cuestiones importantes relacionadas con esta segunda discontinuidad, tanto para los investigadores como para los futuros profesores o estudiantes.

Palabras-claves: segunda discontinuidad de Klein, producto escalar, epistemología, formación inicial

Dans une préface célèbre, Klein (2008, p. 1) a souligné l'existence d'une double discontinuité dans le parcours académique des étudiants se destinant au métier d'enseignant. La première discontinuité advient à l'entrée de l'université (entre les mathématiques du secondaire et celles de l'université), tandis que la seconde se produit lorsque les étudiants quittent l'université pour occuper un poste d'enseignant de mathématiques dans le secondaire. À son sujet, Klein évoquait l'importance de considérer les « mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur[1] ».

La première discontinuité – aussi appelée transition secondaire-supérieur – a été massivement étudiée en didactique des mathématiques et ce, à maints égards (Biza et al., 2016 ; Gueudet, 2008). En ce qui concerne la seconde discontinuité, si elle a souvent inspiré les mathématiciens et les didacticiens, elle n'a fait l'objet de recherches dans l'enseignement des mathématiques *per se* que depuis une quinzaine d'années. On peut considérer qu'un regain d'intérêt pour des problématiques liées à son sujet remonte à Kilpatrick (2008), qui a été le premier à mettre en parallèle les contributions de Klein, Pólya et Freudenthal dans ce domaine :

> Klein, Pólya, and Freudenthal all saw the value of helping teachers develop mathematical knowledge that went beyond the content they would teach and was more synoptic than the typical university mathematics course. They all saw that teachers need to know more than how to do the mathematics they are teaching; teachers need the specialized mathematical knowledge and skill that will give them a broad perspective on the field and equip them to work with learners […] Consequently, the question of what is elementary and how one might adopt a higher stance to regard that elementary work becomes problematic when one moves outside of mathematics and certainly when one moves into mathematics education. What is elementary in mathematics education? Do people agree? Where is the higher standpoint from which that elementary mathematics education can be surveyed? Does anyone know? (Kilpatrick, 2008, pp. 15-16)

Depuis lors, des recherches ont été conduites en lien avec la seconde discontinuité de Klein pour comprendre de manière qualitative et à plusieurs égards ce que peut signifier le fait d'adopter un « point de vue supérieur sur les mathématiques élémentaires ». Certaines recherches se sont focalisées sur la conception de cours qui permettent de faire des liens entre les mathématiques académiques et celles du secondaire[2], d'autres ont permis d'identifier des problématiques importantes (e.g. Gueudet et al., 2016 ; Prediger, 2013 ; Winsløw & Grønbæk, 2014 ; Winsløw & Kondratieva, 2018). Durant la conférence internationale INDRUM2020[3], différentes recherches liées à cette seconde

1. C'est aussi la traduction du titre de l'ouvrage de Klein (1872).

2. En anglais, on parle de « capstone courses ».

3. https://indrum2020.sciencesconf.org/

discontinuité ont été présentées (Hoffmann & Biehler, 2020 ; Planchon & Hausberger, 2020 ; Winsløw, 2020), ce qui a permis d'identifier des problématiques cruciales à traiter dans les années futures :

> 1/ finding relevant topics with strong epistemological foundation (e.g. congruence, symmetry, integration, proof); 2/ developing collaborations between university teachers and researchers in didactics of mathematics (some might be both) for implementation and analysis; 3/ managing to implement it, depending on the context: department of mathematics *versus* faculty of education; 4/ finding a way of dissemination of research results toward mathematics university teachers. (Biehler & Durand-Guerrier, 2020, p. 287)

L'objet de cet article est lié à la première de ces quatre problématiques : comment choisir des contenus mathématiques pour aborder, comprendre puis surmonter la seconde discontinuité de Klein dans des cours dédiés ? Plus précisément, notre objectif est lié aux trois facettes suivantes qui nous semblent éclairer cette problématique :

- Donner à voir la nature du travail que le chercheur peut avoir à conduire en amont d'un tel cours dédié.
- Développer différentes manières de comprendre l'expression « mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur » pour qualifier le travail à conduire avec les futurs enseignants.
- Mettre en valeur des outils ou des leviers, des hypothèses ou des enjeux principaux (pour les étudiants, pour les enseignants, pour les chercheurs) en lien avec cette seconde discontinuité pour mieux la comprendre et la surmonter.

Plus récemment, dans un numéro de la revue ZDM consacré à cette problématique, une classification des différents articles du numéro en quatre types a été produite, selon la manière que ces recherches ont d'envisager la seconde discontinuité de Klein : notre article s'inscrit alors plutôt dans le premier type qui relève de recherches proposant de renforcer les liens entre les mathématiques du secondaire et du supérieur (Wasserman et al., 2023, p. 729).

Nous choisissons de nous concentrer sur la notion de produit scalaire[4] pour au moins deux raisons. D'une part, cette notion a été peu étudiée en didactique des mathématiques[5] et, en retour, on peut espérer identifier des aspects importants liés à son enseignement dans

4. Nous supposerons dans la suite, et sans mention explicite, que les produits scalaires sont définis sur un espace euclidien, c'est-à-dire un R-espace vectoriel de dimension finie.

5. À l'exception des mauvaises conceptions des étudiants (Junus, 2018) ou de la manière dont ils peuvent donner sens aux polynômes de Legendre avec l'aide d'un environnement technologique (Caglayan, 2018, 2022).

le secondaire ou le supérieur. D'autre part, notre domaine de recherche en tant que mathématicien est lié à cette notion (Grenier-Boley, 2019) et nous avons une grande expérience de l'enseignement d'éléments d'algèbre bilinéaire pour les futurs enseignants en France. Les exemples et idées présentés dans cet article sont principalement issus de cette double spécificité mais n'ont pas été testés en formation à proprement parler, ce qui constitue déjà une perspective immédiate de cette étude. Puisque nous souhaitons aboutir à des éléments généraux qui nous semblent permettre de comprendre voire surmonter la seconde discontinuité de Klein, notre équipement théorique sera minimal, et essentiellement lié à la transposition didactique (Chevallard, 1991).

Nous commençons par présenter le système français de formation des enseignants, avant de détailler les curricula associés à la notion de produit scalaire. En lien avec les deux premières facettes, nous développons ensuite plusieurs exemples et occasions liés à l'enseignement du produit scalaire qui permettent selon nous de mettre en valeur des éléments importants liés à la seconde discontinuité de Klein. Nous traitons enfin la troisième facette, en revenant à un niveau plus général, au-delà du seul cas du produit scalaire.

Aspects institutionnels et curriculaires

Formation des enseignants du secondaire

Actuellement, les étudiants qui souhaitent devenir enseignants de mathématiques dans le secondaire[6] doivent justifier de deux conditions[7] : être titulaire d'un diplôme de Master (ou équivalent) et être lauréat d'un concours qui peut être le CAPES (Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré) ou l'Agrégation. Traditionnellement, les étudiants qui souhaitent préparer le CAPES s'inscrivent au sein du Master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) qui est adapté à la formation initiale au métier d'enseignant de mathématiques dans ses diverses dimensions, tandis que les étudiants qui souhaitent préparer l'Agrégation s'inscrivent au sein d'un M2 disciplinaire mathématique, c'est-à-dire intégralement dédié aux mathématiques de l'enseignement supérieur. Dans le système actuel, un éventuel cours lié à la seconde discontinuité de Klein ne peut être possiblement déployé qu'en Master MEEF : pour cette raison et pour des raisons de place, nous supposerons dans la suite que les étudiants ou enseignants considérés se forment (ou se sont formés) au sein d'un Master MEEF et préparent (ou ont obtenu) le CAPES. Des liens ou éléments sous-jacents à l'Agrégation seraient

6. Au collège (élèves de 11 à 15 ans) ou au lycée (élèves de 15 à 18 ans).

7. Pour simplifier, nous n'envisageons ici que le cas d'étudiants français souhaitant devenir enseignants titulaires de l'enseignement secondaire général public français au moyen d'un concours externe.

cependant pertinents pour éclairer de manière complémentaire la seconde discontinuité de Klein et pourraient faire l'objet d'un autre article. Nous en donnons toutefois quelques aspects dans l'une des sections de cet article.

Le concours du CAPES[8] consiste en deux écrits d'admissibilité (écrit 1, écrit 2) et, en cas d'obtention de l'admissibilité, en deux oraux d'admission (oral 1, oral 2), l'écrit 1 étant régi par un programme spécifique, les autres épreuves étant basées sur les programmes de l'enseignement secondaire :

- L'écrit 1 est une épreuve disciplinaire mathématique de niveau universitaire.
- L'écrit 2 est une épreuve disciplinaire appliquée (analyse et résolution d'exercices ou de travaux d'élèves, conception d'activités ou de séances…).
- L'oral 1 est un oral de leçon.
- L'oral 2 est un entretien portant sur l'aptitude à se projeter dans le métier de professeur au sein du service public de l'éducation.

Pour chacune de ces épreuves, les candidats sont évalués par un jury de spécialistes constitué d'enseignants du secondaire, d'inspecteurs de l'éducation nationale et d'enseignants du supérieur. Les textes officiels[9] précisent en outre que ces épreuves doivent être abordées par les candidats avec « un recul niveau master » et montrer leur « aptitude à mobiliser [leurs] connaissances et compétences mathématiques et didactiques dans une perspective professionnelle », toutes choses qui nous semblent liées à un point de vue supérieur sur les mathématiques au sens de Klein.

Aspects curriculaires

Les aspects curriculaires liés à la seconde discontinuité de Klein concernent à la fois les programmes de l'enseignement supérieur et ceux de l'enseignement secondaire pour la notion concernée, ainsi que leurs possibles articulations.

En France, les programmes de l'enseignement supérieur liés à cette seconde discontinuité sont constitués possiblement du programme vu par les étudiants à l'université antérieurement au Master MEEF ainsi que de celui de l'écrit 1 du CAPES. Puisque les programmes varient selon les universités – où ils sont conçus par des commissions d'enseignants-chercheurs – établir le curriculum relatif à une certaine notion relève donc d'une méthodologie spécifique et d'un travail conséquent, liés par exemple à l'étude du processus de transposition didactique externe dans plusieurs universités (Bosch et al., 2021) : voir par

8. https://capes-math.org/index.php?id=textes_officiels.

9. https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000043075486

exemple Planchon (2022). Par souci de simplification, nous nous centrons ici sur le programme de l'écrit 1 du concours[10]. S'agissant du produit scalaire, ce programme cite sous le titre « Produit scalaire et espaces euclidiens » les éléments suivants :

> Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles, des isométries affines, des similitudes. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

En outre, une des leçons possibles de l'épreuve d'oral 1[11] est intitulée « Produit scalaire dans le plan ».

Dans l'enseignement secondaire, la notion de produit scalaire apparaît dans la spécialité de mathématiques de la classe de Première[12] (élèves de 16-17 ans) et dans celle de la classe de Terminale[13] (élèves de 17-18 ans). En Première, la notion est associée à l'objectif de « donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique » (Programme, p. 11). Il s'agit de définir le produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus, de caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs, de donner une expression du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée et d'énoncer ses propriétés de bilinéarité et de symétrie. En termes de résolutions de problèmes, les élèves doivent savoir :

> Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace […], calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes), utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique. (Programme, p. 12)

Des démonstrations et approfondissements sont également associés, dont la formule d'Al-Kashi, la détermination de lieux géométriques, la loi des sinus et la droite d'Euler d'un triangle. En Terminale, il est dit que :

> L'extension à l'espace du produit scalaire de deux vecteurs donne un outil efficace pour les problèmes de distance et d'orthogonalité. Dans cette section, on continue de combiner les outils algébriques (vecteurs, produit scalaire) et la vision géométrique de l'espace, notamment autour de l'orthogonalité : orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite, projection orthogonale sur un plan ou sur une droite. (Programme, p. 8)

10. Voir https://capes-math.org/index.php?id=textes_officiels

11. https://capes-math.org/data/uploads/oraux/exposes_2023.pdf

12. https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm

13. https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

La question de l'extension du produit scalaire du plan à l'espace n'est pas explicitement posée et les contenus semblent analogues à ceux du plan (produit scalaire de deux vecteurs de l'espace, bilinéarité et symétrie, caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs, bases et repères orthonormés, distance entre deux points). Les notions de vecteur normal à un plan, de projeté orthogonal sur un plan sont définies et il est attendu de pouvoir :

> Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace, utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan, résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume, étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan, lieux géométriques simples (Programme, p. 8)

La démonstration de ce que le projeté orthogonal d'un point sur un plan est le point du plan le plus proche de ce point est requise.

Par rapport à la seconde discontinuité de Klein, ces éléments curriculaires manifestent des articulations ou ruptures possibles de natures diverses, que les programmes explicitent ou qui sont au contraire laissées implicites. Nous nous proposons de développer certaines d'entre elles dans la section suivante.

Quelques exemples et idées

Enjeux épistémologiques et historiques

Quelques aspects de l'Histoire du produit scalaire

Si la notion de forme quadratique est sous-jacente dès les mathématiciens grecs, puis au sein de la théorie des nombres à partir des travaux de Fermat, la notion de produit scalaire en tant que telle s'est développée plus tardivement. La notion est en germe lors de l'invention par Hamilton du corps des quaternions en 1843 – première algèbre à division non commutative – et dans les travaux de Grassmann dans les années 1840 sous le nom de « produit linéaire » (Crowe, 1994). Coriolis avait défini la notion de travail d'une force en 1826 – dont la définition moderne implique le produit scalaire – avant que Maxwell ne montre plus généralement l'importance des vecteurs de Hamilton en physique en 1873[14] (Crowe, 1994). Les travaux de Gibbs en 1881, puis de Heaviside en 1885 fondent l'Analyse Vectorielle qui s'émancipe de l'utilisation des quaternions en physique en séparant la partie réelle et imaginaire du produit de deux quaternions purs : avec une lecture moderne, la première est liée (au signe près) au produit scalaire, la seconde au

14. Maxwell, J. C. (1873). *A treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford.

produit vectoriel (Hauchecorne & Surateau, 2008, p. 213). À la fin du dix-neuvième siècle, des définitions du produit scalaire sont données par Peano en termes d'aires ou de déterminant, ou par Burali-Forti et Marcolongo au moyen du cosinus. La définition du produit scalaire comme forme bilinéaire symétrique définie positive est due à Jordan en géométrie (Hauchecorne & Surateau, 2008, p. 243), et généralisée aux espaces de suites par Hilbert, ce qui donnera lieu aux espaces préhilbertiens puis aux espaces hilbertiens après les travaux de Von Neumann en 1927 (Hauchecorne & Surateau, 2008, p. 224). Le développement de l'Algèbre Moderne, initié par les travaux de Wedderburn et Dickson, puis poursuivi par Albert, Brauer, Hasse et Noether et par Bourbaki, achève de fonder la théorie moderne des formes bilinéaires (symétriques), avant que Witt n'initie la théorie algébrique moderne des formes quadratiques en 1937 (Scharlau, 1985).

À propos de quelques enjeux possibles

Ces quelques éléments d'Histoire peuvent inspirer des approches de la notion de produit scalaire, que ce soit pour les élèves de Première ou pour les étudiants à l'université.

D'après les programmes de lycée[15], « il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique ou épistémologique. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. » (Programme, p. 5). Les documents d'accompagnement des programmes[16] envisagent une telle opportunité pour le produit scalaire en Première. Au moyen d'une activité liée au travail d'une force, il est possible de « permettre à l'élève de percevoir la composante des forces exerçant un travail sur un déplacement », ce qui peut aboutir aux définitions du produit scalaire au moyen de la projection orthogonale ou du cosinus (Document d'accompagnement, pp. 2-4)

Dans l'enseignement supérieur, il nous semble important de discuter avec les étudiants de l'intérêt (ou pas) d'une approche de la notion de produit scalaire liée à certains des éléments historiques mentionnés dans la sous-section précédente, d'autant plus s'ils peuvent être reliés à des enjeux épistémologiques cruciaux. Pour cela, détaillons ici par exemple quels pourraient être les intérêts d'une approche du produit scalaire basée sur celle de Peano (point de vue sur les aires, en lien avec la notion de déterminant[17]). En premier lieu, dans une perspective épistémologique, Peano inscrivait plus généralement cette approche dans une volonté de dégager et réorganiser les concepts mathématiques. Avec les étudiants, l'approche pourrait se faire en deux temps avec d'abord un travail sur les

15. https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm

16. https://eduscol.education.fr/document/24589/download

17. La notion de déterminant de deux vecteurs du plan est vue en Seconde.

aires (et volumes) au niveau universitaire, puis un travail sur l'intérêt d'une approche du produit scalaire par les aires à la manière de Peano en classe de Première.

Pour le premier temps, si on fixe une base ordonnée dans le plan affine réel, le point de départ serait la notion d'aire algébrique d'un triangle orienté, ou même d'un parallélogramme orienté. Une extension à l'espace pourrait être envisagée, qui impliquerait possiblement les notions de produit mixte, de produit vectoriel et de volumes algébriques. Il nous semble qu'une telle approche pourrait engendrer des types de questionnements pluriels et importants chez les étudiants :

- Dépendance (ou pas) du choix des sommets et de leur ordre dans les diverses définitions (aires, volumes).
- Effet d'un changement d'orientation pour les aires ou volumes algébriques, conséquences sur les signes associés.
- Intérêt de l'additivité des aires ou volumes algébriques, à comparer avec les aires ou volumes géométriques.

Mise en valeur de la nature affine des notions d'aire et de volume, usuellement introduites en géométrie euclidienne.

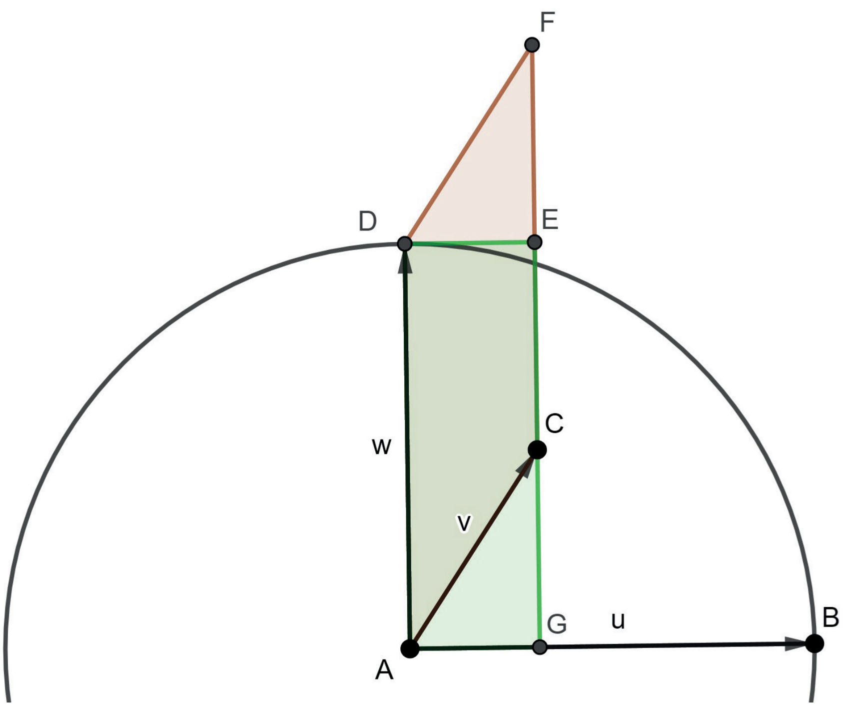

Figure 1. – Représentation de l'aire comme produit scalaire (Geogebra)

Pour le second temps (cf. Figure 1), le plan étant orienté de u vers v, le produit scalaire de ces deux vecteurs est défini comme $\det(v,w)$ où w est l'image de u par une rotation d'angle droit dans le sens direct. Cela correspond à l'aire algébrique – ici positive – du parallélogramme orienté *ACFD*, qui est aussi celle du rectangle *AGED* par découpage-recollement. La discussion avec les étudiants pourrait alors déboucher sur la possibilité d'établir certaines propriétés algébriques[18] du produit scalaire dans un cadre géométrique (orthogonalité, colinéarité, angle géométrique). Une telle approche permettrait aux étudiants de travailler des changements de cadres entre le cadre algébrique et le cadre géométrique (Douady, 1987) et, possiblement, de nouvelles mises en fonctionnement des connaissances sous-jacentes (Robert, 1998). Elle pourrait également permettre d'évaluer la pertinence d'une activité d'introduction du produit scalaire en classe de Première, qui consisterait à se baser sur des aires de parallélogrammes ou de rectangles, au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique.

Définitions et représentations

Quelle définition ?

La section précédente illustre déjà le fait que le choix d'une définition pour le produit scalaire peut être reliée à différents enjeux pour les étudiants comme pour les élèves de Première.

Les programmes de Première demandent que le produit scalaire soit introduit en termes de projections ou avec la formule liée au cosinus et que soit donnée l'expression dans une base orthonormée. Dans l'enseignement supérieur d'autres définitions sont possibles, par exemples en termes d'aires (cf. section précédente) ou en tant que forme bilinéaire symétrique définie positive. Dans ce cadre, un aspect important pour les futurs enseignants nous semble être de prendre conscience de l'importance du choix d'une définition – ici dans l'enseignement secondaire ou dans l'enseignement supérieur – et, une définition étant choisie, de voir dans quelle mesure on peut ordonner, prouver (ou admettre !) les propriétés qui correspondent aux autres définitions. À cet égard, on amènerait les étudiants à constater que le travail mathématique sous-jacent peut être très différent d'un choix à l'autre, plus ou moins difficile, et engager des connaissances anciennes variées. Ce travail nous semble de plus intimement lié à la réflexion à mener pour la leçon d'oral 1 dédiée au produit scalaire.

Plus généralement, ce travail sur les définitions rejoint des enjeux majeurs pour les élèves, étudiants ou enseignants qui ont déjà été identifiés en didactique des mathématiques : évaluer une approche, articuler les processus de définition et de preuve

18. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_scalaire pour plus de détails.

(Ouvrier-Buffet, 2013), vivre et faire vivre la dimension expérimentale des mathématiques (Durand-Guerrier, 2010), que ce soit en lien avec les contenus universitaires, ou dans la perspective d'enseigner un contenu dans le secondaire. Ces problématiques seront sous-jacentes dans la plupart des exemples que nous développons ci-dessous.

Représentations

Par ses différentes définitions, le produit scalaire est associé naturellement à différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 2006), voire à des mélanges entre ces registres :

- Un registre structurel : forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Un registre vectoriel : $\vec{u}.\vec{v}$ ou $b(\vec{u},\vec{v})$ ou $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$.
- Un registre des coordonnées, par exemple relativement à une base orthonormée : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$.
- Un registre associé aux longueurs des segments, voire à leurs mesures algébriques (projections orthogonales) : $\pm AB \times AH$ ou $\overline{AB} \times \overline{AH}$.
- Un registre matriciel, lié aux matrices de Gram.

Dans ses travaux, Duval fait l'hypothèse que la compréhension d'une notion est indissociable d'un travail sur les changements de registres sous-jacents et sur les articulations entre ces registres (Duval, 2006). Un tel travail, qui permet par exemple d'expliciter puis de comprendre comment surmonter des difficultés de traduction entre différentes écritures, nous semble nécessaire au niveau universitaire, mais également pour préparer les (futurs) enseignants de mathématiques du secondaire à certaines difficultés d'élèves parfois fines : donnons un exemple.

Dans des problèmes de géométrie du plan, la suite d'égalités ci-après est fréquemment utilisée[19], possiblement de manière automatique, par certains étudiants ou enseignants du secondaire : $MA^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA}$. D'un bout à l'autre de l'égalité, elle permet de passer d'un registre des mesures de longueurs à un registre vectoriel et, par suite, d'utiliser certains outils du calcul vectoriel comme la relation de Chasles. Or, le passage d'une égalité à l'autre n'est pas si anodin que cela : au niveau universitaire, il s'agit en premier lieu d'interpréter le fait que l'on travaille dans le plan affine euclidien et que la norme d'un

19. Par exemple pour résoudre des problèmes de lieux ou déterminer de manière plus ou moins implicite les lignes de niveaux d'une application du plan affine euclidien dans $\mathbb{R}$, e. g. celles de $M \mapsto MA^2 - MB^2$ ou $M \mapsto MA^2 + MB^2$, A et B étant deux points fixés du plan.

vecteur y correspond à la distance entre deux points ; en second lieu, il faut se souvenir que la norme est issue d'un produit scalaire et écrire le lien que cela manifeste[20].

De l'enseignement secondaire à l'université

Nous en venons maintenant à la description de quelques exemples qui nous semblent susceptibles d'éclairer des aspects importants de la seconde discontinuité de Klein et qui trouvent leur origine dans l'enseignement secondaire. Nous consacrerons la section suivante à ceux qui trouvent leur origine à l'université.

Des liens avec des connaissances anciennes

En classe de Quatrième (13-14 ans), les élèves apprennent qu'un triangle ABC du plan est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (théorème de Pythagore), c'est-à-dire si et seulement si $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$. En classe de Première, une idée fructueuse pourrait être de baser l'introduction du produit scalaire sur cette connaissance ancienne en étudiant le nombre $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$ afin de mesurer l'erreur commise ou le « reste » dans l'égalité de Pythagore pour un triangle donné.

Dans le plan euclidien muni d'une base orthonormée, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$ puis $\Delta = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, en utilisant la conversion de la section précédente. Si les vecteurs considérés ont pour coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $\frac{\Delta}{2} = xx' + yy'$. Ces considérations peuvent alors conduire à poser la définition $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ et à en étudier les propriétés.

L'opportunité est alors offerte de discuter avec les étudiants des avantages et désavantages d'une telle approche. Quels sont les intérêts d'une telle définition et comment permet-elle (ou pas) de prouver les autres propriétés du programme de Première ? Comment et avec quels indicateurs ou outils évaluer sa consistance en tant que (futurs) enseignants ?

Extension d'une notion

Dans le programme de Terminale, il est préconisé de procéder à « l'extension à l'espace du produit scalaire de deux vecteurs » (*op. cit.*) à partir des connaissances des élèves sur le produit scalaire dans le plan. Nous nous trouvons donc dans un cas explicite d'extension de notions déjà introduites antérieurement, selon la terminologie de Robert (1998) sur les différents statuts des notions enseignées. On parle d'extension d'une notion à un

20. C'est le lien entre une forme quadratique q et sa forme polaire b, soit $q(x) = b(x,x)$ ou encore ici $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}$.

niveau donné si « les fonctions que remplissent ces notions sont en partie déjà dégagées sur les notions précédentes, les problèmes qu'elles permettent de résoudre peuvent être proposés dans des termes déjà rencontrés » (Robert, 1998, p. 163).

Il est alors possible de demander aux étudiants d'étudier la pertinence d'une telle construction par extension, que ce soit par rapport à leurs propres connaissances ou par rapport aux connaissances supposées anciennes des élèves de Terminale. Dans la mesure où le curriculum n'offre pas d'autre possibilité, il semble aussi opportun de concevoir une approche qui respecte au mieux cette approche par extension, tout en n'omettant pas certaines problématiques, telle celle de l'indépendance des choix faits (choix des représentants des vecteurs, choix du plan sur lequel on s'appuie…).

Rechercher et résoudre les incohérences

Lorsque le produit scalaire est défini en classe de Première, il y a une distance sous-jacente (et implicite) qui provient de la norme euclidienne, et qui est donc liée au produit scalaire, ce qui produit de fait un « cercle vicieux » du point de vue des mathématiques universitaires. Avec les étudiants, cela peut mener à discuter de nombreuses questions, parmi lesquelles :

- Que se passe-t-il si la distance sous-jacente n'est pas la distance euclidienne ?
- Est-il possible d'être consistant à ce sujet dans l'enseignement secondaire ? Est-ce important ?
- Quelle est la « meilleure définition » du produit scalaire à cet égard ?

Plus généralement, cet exemple met en valeur l'importance pour les étudiants de penser aux incohérences ou aux cercles vicieux qui sont présents dans l'enseignement secondaire, lorsqu'on considère cet enseignement avec le recul apporté par l'enseignement supérieur. En tant que futurs enseignants, ils peuvent alors être amenés à réfléchir à l'importance de faire des choix conscients pour leurs élèves, avec dans le même temps des « garde-fous » associés au recul mathématique qu'ils ont, mais en prenant aussi en compte les connaissances particulières de leurs élèves, et en particulier en faisant aussi parfois le deuil de certains aspects qu'ils jugeraient importants au niveau universitaire.

Éclairer la résolution d'un problème

En Première puis en Terminale, il est demandé d'utiliser « la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan » (*op. cit.*). Si on travaille dans un repère orthonormé, la distance du point $M\left(x_M, y_M\right)$ du plan ou $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$ de l'espace à la droite (D) peut s'exprimer de différentes manières selon la manière de décrire la droite, ce qui mobilise différents registres :

- Si (D) est une droite du plan définie par l'équation $ax+by+c=0$, la distance cherchée peut s'exprimer par $\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- Si (D) est définie comme la droite du plan ou de l'espace passant par A de vecteur normal $\vec{n}$, la distance cherchée s'exprime $\frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
- Si (D) est définie comme la droite de l'espace passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, la distance cherchée est $\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Pour les étudiants, ces différents choix possibles peuvent permettre d'apporter un recul utile sur la résolution du problème du calcul de la distance d'un point à une droite, en faisant des liens entre les différentes descriptions de l'objet géométrique « droite », ce qui mobilise différents registres de représentations et leurs articulations.

Au niveau de l'université, l'application de projection se généralise dans les espaces euclidiens (projection sur un sous-espace vectoriel K) ou dans les espaces de Hilbert (projection sur un convexe fermé K) et les propriétés de cette application peuvent s'énoncer dans les cadres algébriques, analytiques ou géométriques. Différentes manières de caractériser la projection sur K peuvent s'y exprimer, que ce soit en termes de distance minimale, à partir de bases orthonormales ou de bases hilbertiennes, à partir de propriétés géométriques ou par les matrices de Gram. Par exemple dans un espace de Hilbert H, si K est un convexe fermé, il existe une unique application P_K de H dans K, appelée projection sur le convexe, telle que la distance de $\vec{x}$ dans H à K soit égale à celle de $\vec{x}$ à $P_K(\vec{x})$. En outre, $P_K(\vec{x})$ est l'unique élément de K vérifiant (par exemple) : quel que soit y élément de K,

$$\left(\vec{x}-P_K(\vec{x})\right).(\vec{y}-P_K(\vec{x}))\leq 0\,.$$

Dans ce cadre, la distance de $\vec{x}$ à K est alors $\left\|\vec{x}-P_K(\vec{x})\right\|$. Il peut également être intéressant de voir avec les étudiants en quoi ce théorème permet (ou pas) d'éclairer les formules précédentes, et aborder avec eux les problèmes de distance minimale.

De l'université à l'enseignement secondaire

Utiliser le levier méta ou des questions méta

Pour engager une réflexion des étudiants sur les notions mathématiques sous-jacentes, le recours au levier méta (Dorier, 1997 ; Robert, 1998) ou à des « questions méta » peut s'avérer intéressant, dans la mesure où ce levier pourrait avoir d'autant plus de potentiel qu'il est relié à des activités d'étudiants ou d'élèves. Rappelons qu'il s'agit d'évoquer des analogies entre domaines, de donner à voir l'organisation des connaissances académiques, de mettre en valeur des méthodes, ou encore de leur proposer des questionnements portant sur ces différents points. Donnons quelques exemples de questions méta, dont certaines sont liées à des éléments précédemment évoqués.

Dans quelle mesure l'expression du produit scalaire sur une base (orthonormale) renseigne (ou pas) sur l'objet « produit scalaire » ? Ce questionnement peut mener entre autres choses à s'interroger sur une caractérisation des normes qui proviennent d'un produit scalaire.

Quelles propriétés dépendent ou non de certains choix ? Nous avons déjà évoqué la question de l'indépendance du choix des représentants des vecteurs ou du plan sur lesquels on s'appuie lorsque l'on étend le produit scalaire du plan à l'espace. Pour citer un autre exemple, la définition du produit scalaire à partir du cosinus ($\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$) mobilise au niveau universitaire le cosinus d'un angle orienté de vecteurs : dans quelle mesure cette définition dépend ou non du choix de l'orientation ? Il se trouve que dans ce cas, la définition ne dépend pas de l'orientation choisie, mais ce n'est pas toujours le cas : pour la formule $\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$, il y a invariance par changement de base directe, mais pas par changement d'orientation.

Dans quelle mesure un nombre peut-il renseigner sur un objet géométrique ? En effet, le produit scalaire étant une « forme bilinéaire », il associe à deux vecteurs un nombre réel. On a déjà vu ci-dessus que ce nombre mesurait le reste dans l'égalité de Pythagore. À cet égard, ce nombre peut permettre de caractériser (ou de définir) l'orthogonalité des vecteurs considérés, ou d'autres objets géométriques. De même le déterminant de deux vecteurs du plan (qui est introduit en Seconde) caractérise leur colinéarité. L'exploration de cette question avec les étudiants à un niveau général peut donc s'avérer pour eux révélatrice de certains aspects des mathématiques.

Dans quelle mesure la notion de forme bilinéaire symétrique définie positive formalise, unifie ou généralise celles de produits scalaires du plan ou de l'espace ? Nous faisons ici référence aux caractères Formalisateur, Unificateur ou Généralisateur des notions enseignées à un moment donné (Robert, 1998) par rapport aux connaissances supposées anciennes des élèves ou étudiants. Lorsque certaines notions possèdent les trois caractères à la fois, on les qualifie de « notions FUG » (Robert, 2008), et l'hypothèse est faite qu'il n'existe pas de problème ou de suites de problèmes pour les introduire avec tout leur sens.

Liens entre domaines ou notions

Il nous semble aussi que la formation initiale des enseignants du secondaire est un lieu propice pour manifester des liens importants entre les domaines ou les notions mathématiques. Nous évoquons un exemple qui rencontre plusieurs des aspects que nous avons déjà cités.

En Algèbre, il arrive que les étudiants soient confrontés au problème suivant : est-ce que l'ensemble des sommes de deux carrés d'entiers est stable par produit[21] ? Il se trouve que la réponse est positive et résulte de l'identité de Lagrange :

$$\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\right).\left(y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2.$$

Il est possible d'établir cette identité sur $\mathbb{R}$ dans un cadre algébrique polynômial, ou alors dans un cadre algébrique lié aux nombres complexes, en utilisant le fait que $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left|x_1+ix_2\right|^2$ puis les propriétés du module.

Dans un cadre vectoriel, si on interprète les nombres sous-jacents comme les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}\left(x_1,x_2\right)$ et $\vec{v}\left(y_1,y_2\right)$ dans un repère orthonormé, il semble que l'identité de Lagrange s'écrive $\left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2=\left(\det(\vec{u},\vec{v})\right)^2+\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2\,(*)$. Dès lors, plusieurs questions se posent. Est-ce correct et, si oui, comment peut-on le démontrer avec les étudiants ? Quels liens possibles cette égalité rend-elle manifestes ? Est-ce que cela peut se généraliser dans l'espace ? Donnons quelques éléments de réponses à ces questions pour éclairer des liens qui pourraient être propices en formation des enseignants.

L'identité (*) est correcte dans le plan et on peut l'établir ou l'interpréter dans un cadre géométrique en utilisant les aires algébriques de parallélogrammes ou de triangles orientés, que nous avons évoquées dans la section consacrée aux enjeux épistémologiques. Mais cette identité peut également permettre de comprendre comment caractériser la mesure des angles orientés de vecteurs dans le plan :

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)\equiv\theta\left(2\pi\right)\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}\text{ et }\sin\theta=\frac{\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}.$$

Ici, c'est l'égalité $(\cos\theta)^2+\left(\sin\theta\right)^2=1$ qui permet de faire le lien avec l'identité de Lagrange.

Dans l'espace, l'identité (*) se généralise de la façon suivante : $\left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2+\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2\,(**)$. Elle peut résulter d'un travail sur les aires algébriques de parallélogrammes, mais elle peut aussi découler de l'usage de (*), tout cela dans un plan bien choisi. Dans cette nou-

21. Cette question a des fondements historiques. Elle se généralise et admet une réponse positive pour la somme de 4 et de 8 carrés. D'après un théorème de Hurwitz en 1923, c'est impossible pour les sommes de k carrés pour k différent de 1, 2, 4 ou 8, si tant est qu'on exige une *formule polynômiale* en les variables (ce qui est le cas pour les formules connues). En revanche, le produit de deux sommes de 2^n carrés dans un *corps* est encore une somme de 2^n carrés, en vertu d'un théorème de Pfister en 1965 (Scharlau, 1985, Chapter 4) qui est à la base du développement de la théorie algébrique des formes quadratiques. Ce problème a mené à la définition des formes multiplicatives et de Pfister, qui sont des briques élémentaires pour comprendre les formes quadratiques définies sur un corps quelconque, voir Grenier-Boley (2019).

velle identité, le produit vectoriel « remplace » le déterminant, ce qui peut très bien être discuté avec l'expression des coordonnées du produit vectoriel en termes de cofacteurs d'une certaine matrice. Les identités (*) et (**) permettent de prouver une propriété géométrique de l'espace, le fait que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Enfin, (**) permet de retrouver l'identité de Lagrange adaptée à la situation, c'est-à-dire que le produit de la somme de 3 carrés est somme de 4 carrés[22] (voir note 21).

Agrégation : quelques éléments

Dans cette section, nous décrivons trois exemples (parmi beaucoup d'autres) qui nous paraissent importants à mentionner en lien avec le concours de l'Agrégation (externe), que ce soit en termes de généralisations ou de liens fondamentaux qui se manifestent à ce niveau, et qui positionnent le savoir savant « produit scalaire » dans un horizon plus large, où les liens avec le savoir enseigné dans le secondaire sont plus ou moins explicites.

D'abord, les étudiants rencontrent aussi des produits scalaires sur des espaces vectoriels de dimension infinie (par exemple sur des espaces de fonctions) qui peuvent donner lieu à des inégalités fondamentales ou des généralisations. Par exemple, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^2([a,b],\mathbb{C})$ est un espace hilbertien pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. Dans un tel espace de Hilbert, l'inégalité de Bessel, donne une majoration cruciale qui repose sur des liens étroits avec la projection orthogonale et l'égalité de Parseval, qui en constitue le cas d'égalité, se révèle alors comme une généralisation du théorème de Pythagore. Les outils qui se développent dans ce cadre ont des applications majeures en mathématiques comme en physique (par exemple équations aux dérivées partielles, mécanique quantique, traitement du signal, thermodynamique). Dans ce même cadre, le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan permet de caractériser les normes issues d'un produit scalaire comme celles vérifiant l'identité du parallélogramme.

Dans un registre matriciel, un produit scalaire s'exprime grâce à la matrice de Gram M sous la forme $\langle X,Y\rangle = X^t MY$, cette matrice appartenant à l'ensemble S_n^{++} des matrices symétriques définies positives. Alors, d'une part, cet ensemble rend compte de tous les produits scalaires, puisqu'il y a une bijection entre les produits scalaires et S_n^{++}. D'autre part, dans le cadre des actions de groupes, le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par congruence et S_n^{++} y correspond au stabilisateur de la matrice identité, ce qui peut se traduire par le fait qu'une forme quadratique est définie positive si et seulement si elle est de signature $(n,0)$, c'est-à-dire si et seulement si elle peut s'exprimer comme somme de n carrés.

22. $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) = (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2$

Mentionnons enfin le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles, qui fait état d'un lien fondamental entre le monde linéaire et le monde bilinéaire, et qui permet d'utiliser des objets ou outils linéaires en algèbre bilinéaire, ou vice-versa.

Hypothèses et enjeux

Au regard de la seconde discontinuité de Klein, et dans le cas du produit scalaire, nous avons mis en valeur des situations, des possibilités ou des paramètres qui pourraient selon nous permettre aux étudiants de mobiliser un point de vue supérieur sur les mathématiques de l'enseignement secondaire, au sens de Klein. Pour conclure, nous souhaitons revenir à un niveau général. Nous résumons d'abord les principaux aspects et leviers que nous avons voulu mettre en valeur. Nous développons ensuite des hypothèses qui nous semblent importantes, s'agissant de la manière d'envisager cette seconde discontinuité pour les (futurs) enseignants. Nous terminons en donnant quelques enjeux qui nous semblent se dégager pour de futures recherches, qu'ils concernent les étudiants, les enseignants ou les chercheurs. Il nous semble que tous ces éléments peuvent permettre de mieux comprendre ou étudier cette seconde discontinuité et, à terme, de pouvoir permettre aux futurs enseignants de la surmonter au moins en partie au moyen de leviers adaptés.

Aspects et leviers principaux

En résumé, nous regroupons ici les aspects et leviers principaux que nous avons voulu évoquer dans ce travail et qui nous semblent pertinents pour comprendre ou surmonter la seconde discontinuité de Klein en général pour une notion donnée :

- Utiliser un point de vue historique ou épistémologique, dès que cela est pertinent[23].
- Créer des liens entre les curricula de l'université et de l'enseignement secondaire *dans les deux directions* (et pas seulement de l'université vers l'enseignement secondaire).
- Organiser un travail spécifique qui articule les activités de définition et de preuve.
- Mettre en valeur les liens entre domaines, l'organisation des mathématiques, les questions qui permettent de donner sens à certains aspects de la notion étudiée (levier méta) : citons ici la notion d'invariant ou de contrainte qui font par ailleurs partie du travail ordinaire du mathématicien (Grenier-Boley, 2019).

23. Pour cet aspect, la thèse de Planchon (2022) constitue un bon exemple.

- Mettre en valeur les caractéristiques formalisatrices, unificatrices ou généralisatrices de la notion, le cas échéant.
- Développer les méthodes ou les techniques qui permettent de résoudre des problèmes avec cette notion.
- Permettre aux étudiants d'identifier et de travailler sur les liens, les références croisées, les interactions ou réinterprétations au sein du même cadre mathématique ou avec un autre cadre mathématique, idem pour les registres associés à la notion.
- Mettre en valeur et discuter des incohérences ou des cercles vicieux présents dans les curricula.

Notons que certains de ces aspects nous semblent de nature à permettre aux étudiants d'envisager les tâches mathématiques de l'enseignant (Bass & Ball, 2004 ; Prediger, 2013), par exemple :

- Fixer et clarifier les objectifs d'apprentissage.
- Analyser et évaluer les approches (préconisées par le curriculum et/ou utilisées dans les manuels).
- Sélectionner, modifier ou construire des tâches ou des occasions d'apprentissage.
- Sélectionner et utiliser les registres représentations et les niveaux de précision appropriés, assurer le passage d'un registre à un autre.
- Analyser et évaluer les contributions des élèves et y réagir de manière à favoriser leur apprentissage.

Quelques hypothèses pour les (futurs) enseignants

Au terme de cette étude, nous souhaitons formuler des hypothèses pour les (futurs) enseignants, qui nous semblent consistantes relativement à la seconde discontinuité de Klein :

- Les connaissances académiques doivent permettre aux enseignants d'avoir des outils pour contrôler et analyser les choix relatifs aux transpositions didactiques (externe, interne) d'une part, pour leur enseignement quotidien d'autre part.
- Les connaissances académiques sont des connaissances utiles au métier d'enseignant de mathématiques dans le secondaire et constituent de fait une partie des connaissances professionnelles des enseignants.
- Il y a un travail spécifique à organiser en formation des futurs enseignants pour leur permettre d'avoir accès aux aspects et leviers principaux listés dans la section précédente.

La troisième hypothèse est celle qui doit selon nous présider à la constitution de cours ou de séances spécifiques en formation des enseignants, susceptibles de créer des liens entre les mathématiques du secondaire et de l'université et à terme de permettre aux futurs enseignants de surmonter les difficultés les plus importantes qui y sont associées. Selon nous, de tels cours pourraient également permettre aux enseignants d'être « rassurés » vis-à-vis de questions telles que « Ai-je le droit de faire ça ? » ou « Est-ce que je fais un bon choix par rapport aux programmes ? ». Le simple fait que les enseignants puissent envisager les programmes du secondaire d'une manière différente, en l'interrogeant ou en ayant une créativité contrôlée à son égard, nous semble aussi très important.

Quelques enjeux pour les recherches futures

D'abord, notre étude donne à voir l'empan du travail mathématique préliminaire et nécessaire à la conception d'un dispositif qui permettrait de surmonter la seconde discontinuité de Klein pour une notion donnée. Il est selon nous de la responsabilité des chercheurs en didactique des mathématiques de trouver des notions pertinentes pour cela, c'est-à-dire qui aient des fondements épistémologiques stables et qui permettent de créer des liens fondamentaux[24] dans des cours dédiés pour les (futurs) enseignants. Il ne fait pas de doute qu'un tel travail demande du temps mais aussi une collaboration entre chercheurs pour conduire les recherches associées, construire les cours, les tester voire les amender. Nous le disions en introduction, l'étude de la seconde discontinuité de Klein pour des notions encore peu étudiées en didactique des mathématiques, peut d'ailleurs permettre de repérer des problématiques principales pour commencer cette étude.

Ensuite, il nous semble que cette étude pointe une problématique qui est encore peu étudiée en didactique des mathématiques : celle de la cohérence des connaissances enseignées dans les classes vis-à-vis de la transposition didactique.

Enfin, ayant fait le choix de conduire cette étude avec un équipement théorique et méthodologique minimal, nous souhaitons donner quelques éléments complémentaires à cet égard pour des recherches futures.

En premier lieu, la problématique des registres de représentations sémiotiques (Duval, 2006), nous semble primordiale dans l'étude de la seconde discontinuité de Klein. S'agissant du produit scalaire, nous avons pointé la grande variété des registres qui interviennent, et se pose alors la question du degré de congruence entre ces registres, qui nous semble être une problématique majeure pour les futurs enseignants, comme pour les élèves de lycée. Ainsi, le registre des coordonnées (dans une base orthonormée) nous semble particulièrement non congruent aux autres registres. Or, pour les élèves,

24. C'est-à-dire de mettre en valeur certains des aspects listés ci-dessus.

il pourrait fonctionner de manière assez automatique mais de façon obscure, sans qu'ils en perçoivent toutes les conditions ou tous les enjeux, en étant possiblement mêlé à une confusion ou un mélange entre points et vecteurs. Pour les enseignants, il pourrait aussi être tentant d'en rester majoritairement à ce registre avec les élèves. Avec les futurs enseignants, l'idée de discuter de cette difficulté entre coordonnées et vecteurs et de réfléchir à la manière de compléter ce registre des coordonnées pour que les élèves puissent appréhender son usage de façon pertinente, nous semble particulièrement importante. À un niveau plus général, pour une notion donnée, une focale théorique et méthodologique sur le degré de congruence des registres, leur articulation, les avantages et inconvénients à utiliser tel ou tel registre, y compris dans une perspective sémiotique, nous semble souhaitable.

En second lieu, une grande partie des aspects cités dans cet article dépend de la référence avec laquelle les chercheurs vont modéliser les activités mathématiques possibles pour les notions considérées. En Théorie Anthropologique du Didactique, la modélisation correspondante peut référer au modèle praxéologique ou épistémologique de référence (Florensa et al., 2015) et, en Théorie des Situations Didactiques, au modèle de milieu épistémologique (Bloch, 2002). Pour notre part, nous souhaitons à l'avenir inscrire nos recherches en Théorie de l'Activité et prendre comme modèle le relief d'une notion (Robert & Vandebrouck, 2014). Le relief est le croisement d'études de nature épistémologique, curriculaire et didactique à un moment précis d'apprentissage d'une notion donnée :

> Il renseigne sur la conceptualisation en termes de caractère outil ou objet, cadre, registre, point de vue, mise en fonctionnement possible [...] il informe sur les difficultés répertoriées d'élèves et les résultats des études didactiques correspondantes, compte tenu des programmes et des obstacles ou spécificités épistémologiques et permet donc de dégager des enjeux d'apprentissages, des besoins d'élèves pour faire des hypothèses sur des tâches pertinentes. (Grenier-Boley, 2019, p. 118)

Des recherches s'inscrivant en Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard,1991) ont déjà été conduites sur la seconde discontinuité de Klein (Winsløw, 2020 ; Planchon, 2022). De notre point de vue, les analyses et outils qui s'y développent :

- Permettent de caractériser le modèle dominant de référence dans une institution donnée, et l'écologie des savoirs sous-jacente (Artaud, 1998).
- Repèrent les différentes transpositions didactiques à l'œuvre ainsi que l'inclusion des praxéologies locales, dans d'autres plus larges.
- Étudient particulièrement les liens entre techniques et technologies, permettant de caractériser par exemple un éventuel manque.

- Proposent des enrichissements ou des transformations à partir du repérage de ce qui manque dans les praxéologies identifiées (liens entre tâches, techniques et technologies notamment).
- S'attachent au premier moment de l'étude avec des problèmes amenant aux raisons d'être des notions.

S'agissant du relief d'une notion à un moment précis d'enseignement, les connaissances visées pour les élèves sont décrites selon plusieurs dimensions :

- Telles qu'elles apparaissent dans les programmes, en référence aux savoirs mathématiques mais en tenant compte de leur histoire et épistémologie, ce qui amène à repérer les découpages du savoir que font les programmes. Cela amène à s'attacher aux besoins immédiats des élèves, ce qui peut nécessiter d'interpréter les notions selon leurs caractères (Formalisateur, Unificateur ou Généralisateur) voire leur type (Réponse À un Problème, extensions avec ou sans accident, notion FUG), voir Robert (2008).
- En termes d'adaptations possibles des connaissances considérées du point de vue des mises en fonctionnement attendues (mobilisable, disponible) et de leur diversité (Robert, 2008).
- En termes de scénario, en tenant compte des types de la notion (introduction) et des dynamiques possibles entre cours et exercices.
- En termes de difficultés d'élèves.

En lien avec l'étude de la seconde discontinuité de Klein, la modélisation offerte par le relief d'une notion nous semble pertinente pour deux raisons. D'une part, c'est une référence pour le chercheur en didactique des mathématiques, lui permettant de concevoir des cours adaptés pour les futurs enseignants tenant compte de la description des connaissances listées ci-dessus. Cette référence incorpore aussi certains des aspects principaux cités dans cet article. Compte tenu des hypothèses et de l'opérationnalisation du cadre théorique de la théorie de l'Activité, le relief constitue aussi une référence pour qualifier les apprentissages des étudiants (ou des élèves) compte tenu de leurs activités organisées par les enseignants. D'autre part, le relief mis à disposition des (futurs) enseignants est aussi une référence pour « faire faire des mathématiques », élaborer un scénario ou une séquence. Il est donc également un outil pertinent à déployer en formation des enseignants, en le restreignant toutefois aux outils susceptibles d'aider les enseignants.

Bibliographie

ARTAUD, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques (pp. 101-138). ARDM & IUFM éd. : Caen.

BASS, H., & BALL, D. L. (2004). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. Dans W. Jianpan & X. Binyan (Dirs.) *Trends and challenges in mathematics education* (pp. 107-123). Shangai: East China Normal University Press.

BIEHLER, R. & DURAND-GUERRIER, V. (2020). TWG3 report: University Mathematics Didactic Research on Number Theory, Algebra, Discrete Mathematics, Logic. Dans T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Dirs.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 283-287). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

BIZA, I., GIRALDO, V., HOCHMUTH, R., KHAKBAZ, A., & RASMUSSEN, CX. (2016). Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: State-of-the-art and looking ahead. ICME-13 Topical Surveys. Cham : Switzerland : Springer.

BLOCH, I. (2002). *Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des* situations. Dans J.-L. Dorier, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Dirs.), *Actes de la 11e école d'été de Didactique des Mathématiques – Corps – 21-30 août 2001* (pp. 125-139). Grenoble : la pensée sauvage.

BOSCH, M., HAUSBERGER, T., HOCHMUTH, R., KONDRATIEVA, M., & WINSLØW, C. (2021). External didactic transposition in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undegraduate Mathematics Education,* 7(1), 140-162.

CAGLAYAN, G. (2018). Visualizing the inner product $\mathbb{R}^{m\times n}$ in a MATLAB-assisted linear algebra classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(4), 616-628.

CAGLAYAN, G. (2022). Visualizing Laguerre polynomials as a complete orthonormal set for the inner product $\mathbb{P}^n$. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2093795

CHEVALLARD, Y. (AVEC JOSHUA, M.-A.) (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage : 2e édition.

CROWE, M. J. (1994). *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system.* Courier Corporation.

Dorier J.-L. (1997). Ed., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7 (2), 5-32.

Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Cédérom.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. CERME9, TWG17. Dans K. Krainer & N. Vondrová (Dirs.) *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2635-2641).

Grenier-Boley, N. (2019). *La recherche en mathématiques* : *une ressource pour les didacticiens ?* Habilitation à diriger des recherches : Université Paris Diderot.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237–254.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O.N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer, 2016, ICME 13 Topical survey, Gabriele Kaiser.

Hauchecorne, B., & Suratteau, D. (2008). *Des mathématiciens de A à Z (3e édition)*. Ellipses.

Hoffmann, M., & Biehler, R. (2020). Designing a Geometry Capstone Course for Student Teachers: Bridging the gap between academic mathematics and school mathematics in the case of congruence. Dans T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Dirs.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 338-347). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Junus, K. (2018). Assessing students' mathematical misconceptions thourgh concept maps and online discussion transcripts: inner product spaces. In *The 26th International Conference on Computers in Edication (ICCE 2018)* (pp. 772-777).

Kilpatrick, J. (2008). *A higher standpoint.* ICMI proceedings: Regular lectures, 26-43.

Klein, F. (2008). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis (Translation by Gert Schubring).* Springer.

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Habilitation à diriger des recherches : Université Paris Diderot.

Planchon, G., & Hausberger, T. (2020). Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. Dans T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Dirs.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 153-162). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire* : *la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale*. Thèse de Doctorat : Université de Montpellier.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Eds.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (pp. 151–168).

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classes. Dans F. Vandebrouck (Dir.), *La classe de mathématiques* : *activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68). Octarès éditions.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactiques de Mathématiques, 34*(2-3), 239-285.

Scharlau, W. (1985). *Quadratic and Hermitian forms (volume 270)*. Springer Science & Business Media.

Wasserman, N.H., Buchbinder, O., & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education,* 55(4), 719-736.

Winsløw, C. (2020). Professional and academic bases of university mathematics teaching for the 21st century: the anthropological approach to practice-based research. Dans T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Dirs.), Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12-19 September 2020) (pp. 8-27). Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.

Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34/1*, 59-86.

Winsløw, C., & Kondratieva, M. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *International Journal of Research in Undegraduate Mathematics Education, 4*, 119-138.