

Vers une entrée dans la géométrie théorique au cycle 4 : construction d'une référence épistémologique et modélisation didactique dans un EIAH

Elann Lesnes

Université Rouen Normandie, Université Paris Cité,
Université Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université,
Université de Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France
<https://orcid.org/0000-0002-0215-3700>

Au collège, les élèves (11-15 ans) ont des difficultés à entrer dans la géométrie théorique attendue dans les programmes scolaires. Nous étudions ces difficultés à la transition du cycle 3 (grades 4 à 6) au cycle 4 (grades 7 à 9) et nous faisons l'hypothèse que la résolution de tâches de construction vérifiant certaines conditions favorise l'entrée dans le raisonnement déductif. Ce travail est implémenté dans un EIAH dans le cadre du projet MindMath. Nous concevons donc des modèles didactiques implémentables du savoir, de l'activité géométrique de l'élève, des tâches et des parcours d'apprentissage.

Mots-clés : géométrie, modèle praxéologique de référence, EIAH, modélisation didactique

Towards an introduction to theoretical geometry in cycle 4: Building an epistemological reference and didactic modelling in an IT environment

In junior high school, students (11-15 years old) have difficulty entering the theoretical geometry prescribed by the school curriculum. We study these difficulties at the transition from cycle 3 (grades 4 to 6) to cycle 4 (grades 7 to 9) in France, and hypothesise that solving construction tasks that verify certain conditions favours the entry into deductive reasoning. This work is implemented in an IT environment within the framework of the MindMath project. We therefore design implementable didactic models of the knowledge, of the student's geometric activity, of the tasks and of the learning paths.

Keywords: geometry, praxeological reference model, IT environment, didactic models

Hacia una introducción a la geometría teórica en el ciclo 4: construir un referente epistemológico y una modelización didáctica en un contexto informático

En la escuela secundaria, el primer contacto con la geometría teórica del alumnado de 11 a 15 años tal y como se prevé en el currículum francés provoca ciertas dificultades. Se estudian, en el presente trabajo, estas dificultades en la transición del 3º ciclo (grado 4 a 6) al 4º ciclo (grados 7 a 9) en Francia y formulamos la hipótesis que la resolución de tareas de construcción que verifican ciertas condiciones favorece la entrada en el razonamiento deductivo. Este trabajo se implementa en un entorno informático dentro del proyecto MindMath. Por ello, diseñamos modelos didácticos implementables de conocimiento, de actividad geométrica del alumnado, de tareas y de itinerarios de aprendizaje.

Palabras-claves: geometría, modelo praxeológico de referencia, entorno informático, modelización didáctica

Introduction

En septembre 2020, la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP) publie une note d'information suite au Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon (CEDRE) de 2019. Elle révèle qu'environ 75 % des élèves de troisième en France (élèves de 14-15 ans) ne savent pas mener un raisonnement déductif à plusieurs pas ou à un seul pas dans des cas complexes (DEPP, 2020). Ce pourcentage confirme des résultats plus anciens en France comme à l'international. On peut citer par exemple l'étude de Cheng et Lin (2009) qui s'appuient sur des sondages menés dans plusieurs pays pour montrer qu'environ deux tiers des élèves de lycée ne savent pas construire « une preuve géométrique formelle » (Cheng & Lin, 2009, p. 124).

Le raisonnement déductif reste donc mal maîtrisé par les élèves à la fin du collège et au lycée alors qu'il est central dans les programmes du cycle 4, en 2020 un des deux attendus de fin de cycle en géométrie étant : « utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer » (MEN¹, 2020b, p. 136).

Dans cet article, nous reviendrons d'abord sur les raisons possibles des difficultés rencontrées par les élèves à l'entrée dans la géométrie déductive. Nous situant ensuite plutôt au début du cycle 4, nous interrogerons la manière dont on peut introduire le raisonnement déductif en géométrie. Notre objectif n'est pas de construire un programme d'enseignement mais de proposer une réflexion autour de types de tâches qui nous semblent intéressants à développer dans la transition cycle 3/cycle 4 en géométrie.

De plus, nous incluons également une dimension informatique en nous situant dans le cadre de la conception d'un Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH) dont certaines propriétés nous semblent intéressantes pour l'entrée dans la géométrie déductive au collège. Ce travail fait partie d'un projet plus vaste de conception d'un EIAH en algèbre et en géométrie à destination des élèves de collège en France : le projet MindMath. Nous ne développerons ici que ce qui concerne la géométrie, le lecteur ou la lectrice qui s'intéresse à l'algèbre peut se référer à l'article de Grugeon-Allys *et al.* (2024).

Dans la suite de cet article, nous présenterons d'abord nos questions de recherche et les outils théoriques que nous mobilisons pour y répondre (partie I), nous mènerons ensuite une analyse épistémologique, cognitive et didactique de la géométrie plane à la transition cycle 3/cycle 4 (partie II). Nous nous appuierons sur celle-ci pour expliciter les

1. Nous utiliserons le même acronyme pour désigner le ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2014-2017), le ministère de l'Éducation nationale (2017-2018), ainsi que le ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse (2018-2020) et des Sports (2020-2022).

avantages de travailler dans le cadre d'un EIAH pour l'entrée dans la géométrie déductive (partie III). À la lumière de ces deux parties, nous concevons un modèle praxéologique de référence ainsi que des modes de justification relatifs à la géométrie plane au cycle 4 (partie IV) et nous présenterons la construction des modèles didactiques implémentés dans l'EIAH pour, notamment, prendre en compte le savoir, les tâches et le raisonnement des élèves (partie V).

I. Problématisation et outils théoriques

Dans cette partie, nous structurons notre questionnement en quatre questions de recherche qui sont mises en évidence dans les quatre sous-parties suivantes. Pour chacune d'elle, nous présentons les outils théoriques et la méthode mobilisés pour y répondre.

I. Causes possibles des difficultés des élèves

En France, l'enseignement de la géométrie peut être présenté comme une succession de ruptures puisque les élèves passent d'une géométrie guidée par la perception à une géométrie guidée par les instruments et, enfin, à une géométrie guidée par le raisonnement :

Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont essentiellement contrôlées par la perception à une géométrie où le recours à des instruments devient déterminant, pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation (MEN, 2020a, p. 97).

Dans ce travail, nous réinterprétons ces ruptures épistémologiques et cognitives mises en évidence dans d'autres travaux (présentés plus en détails dans la partie II) comme des décalages institutionnels. Ainsi, notre première question de recherche est donc : quelles sont les ruptures épistémologiques, cognitives, didactiques et institutionnelles entre les géométries enseignées à la transition cycle 3/cycle 4 ? (QR1)

Nous faisons l'hypothèse de travail qu'en plus des obstacles épistémologiques et cognitifs que nous présenterons dans la partie II, des décalages institutionnels peuvent être la cause de certaines des difficultés des élèves (HT1). Nous étudions ces décalages en nous plaçant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard (1999) qui prolonge la théorie de la transposition didactique. Cette dernière postule que les savoirs savants des mathématiciens et mathématiciennes ne sont pas ceux enseignés aux élèves et qu'ils passent au contraire par une série de transformations (Chevallard & Joshua, 1991). Ainsi, le savoir savant est transformé en savoir à enseigner dans les documents officiels du MEN. Le savoir à enseigner est à son tour transformé en savoir enseigné par les enseignants et enseignantes dans les classes. Pour répondre à

QR1, nous nous intéressons au savoir à enseigner que nous décrirons grâce à la notion de praxéologie.

Une praxéologie $[T, \tau, \theta, \Theta]$ est un quadruplet composé d'un type de tâches T , d'une technique τ qui permet de réaliser les tâches issues de ce type de tâches, d'une technologie θ qui justifie la technique et d'une théorie Θ qui justifie la technologie. Cette praxéologie portant sur un seul type de tâches est qualifiée de « ponctuelle » en opposition aux agrégats de praxéologies autour d'une même technologie qui forment des praxéologies locales, aux agrégats de praxéologies locales autour d'une même théorie qui forment des praxéologies régionales et aux agrégats de praxéologies régionales qui forment des praxéologies globales (Chevallard, 1999). Les mathématiques sont constituées d'un ensemble de praxéologies globales.

En étudiant les praxéologies enseignées à la transition entre le secondaire et l'université en Espagne, Bosch *et al.* constatent qu'elles sont « ponctuelles, rigides et peu articulées entre elles, ce qui les empêche de s'intégrer pour former des organisations mathématiques² locales relativement complètes » (Bosch *et al.*, 2004, p. 206). Ces praxéologies incomplètes sont caractérisées par l'absence d'un ou plusieurs éléments qui composent une praxéologie, en particulier dans le bloc technologico-théorique. On parle alors de praxéologies muettes ou faibles au sens de Wozniak (2012). Elles peuvent constituer un obstacle didactique et expliquent ainsi certaines des difficultés des élèves en mathématiques (Bosch *et al.*, 2004, p. 222), appuyant notre hypothèse HT1. Pour repérer ces praxéologies, Bosch et Gascón (2005) introduisent la notion de praxéologie de référence³ comme un outil d'analyse de la transposition didactique.

Afin de répondre à QR1, nous mènerons donc une analyse épistémologique et cognitive de la géométrie plane à la transition cycle 3/cycle 4 présentée dans la partie II. Celle-ci nous permettra de construire à notre tour un modèle praxéologique de référence (MPR) afin, notamment, d'étudier les décalages institutionnels et les praxéologies incomplètes entre les programmes scolaires des cycles 3 et 4.

2. Caractérisation des besoins d'apprentissage des élèves

Dans le cadre de la TAD, les sujets des institutions occupent différentes positions au sein de celles-ci (en particulier la position d'élève) et entretiennent un rapport institutionnel avec les objets de l'institution (en particulier les notions mathématiques). Ce rapport peut être conforme aux rapports de l'institution à ces mêmes objets ou non. Or, les décalages

2. Dans cet article, nous utilisons le terme « praxéologie » en lieu et place du terme « organisation mathématique ».

3. Comme Bosch (2019), nous parlerons ensuite de « modèle praxéologique de référence » (MPR).

institutionnels repérés dans l'analyse du savoir à enseigner à la transition cycle 3/cycle 4 peuvent devenir des besoins d'apprentissage ignorés par les institutions (Castela, 2008) et dans de précédents travaux, en appui sur le travail de Grugeon-Allys *et al.* (2012), nous avons défini les besoins d'apprentissage d'un ou une élève comme « ce qui est nécessaire de travailler pour faire évoluer [le] rapport personnel actuel [de l'élève] vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution » (Jolivet *et al.*, 2021, p. 125).

Ainsi, notre deuxième question de recherche est donc : comment caractériser les besoins d'apprentissage d'un ou une élève en géométrie au regard de ce qui est attendu à son niveau scolaire ? (QR2)

Pour répondre à cette question, nous nous appuyons sur les travaux de Grugeon-Allys (2016) qui définit des modes technologico-théoriques en algèbre. Le mode technologico-théorique d'un ou une élève relatif à la praxéologie globale algébrique correspond au bloc technologico-théorique que l'élève mobilise régulièrement dans les praxéologies qu'il ou elle met en œuvre pour résoudre des tâches algébriques (Grugeon-Allys, 2016, p. 66). Quatre modes technologico-théoriques sont ainsi définis en algèbre : un mode idoine au regard du niveau scolaire considéré (dans son cas, la fin du cycle 4), un mode faible en lien avec des technologies faibles au sens de Wozniak (2012) développées par les programmes scolaires ainsi que l'enseignant ou enseignante, un mode incorrect relativement à certains des aspects épistémologiques de l'algèbre élémentaire, et un mode ancien au regard du niveau scolaire (dans ce cas, il s'agit d'un mode arithmétique). Ces modes technologico-théoriques sont définis *a priori* en s'appuyant sur une étude épistémologique et didactique du domaine. Ils sont pertinents uniquement à un niveau scolaire donné. Ainsi, le mode algébrique ancien au cycle 4 est un mode idoine au cycle 2 ou 3. À chaque mode technologico-théorique correspondent certains besoins d'apprentissage.

Nous reprenons la notion de mode technologico-théorique en géométrie en l'appelant désormais mode de justification⁴. À partir de l'analyse épistémologique, cognitive et didactique que nous mènerons dans la partie II, nous pourrons ainsi définir trois modes de justification relatifs à la praxéologie globale géométrique (cf. partie IV). Ces modes sont associés à des besoins d'apprentissage en géométrie.

4. Ce choix de vocabulaire permet d'éviter le mot « technologique » qui prête à confusions dans le cadre d'un travail avec des informaticiens et informaticiennes, et d'appuyer sur l'aspect de l'activité de l'élève lié à la justification des techniques de résolution employées.

3. Conception des tâches et des parcours d'apprentissage

Les besoins d'apprentissage d'un ou une élève étant caractérisés, l'objectif de l'EIAH que nous construisons est d'y répondre en faisant travailler l'élève sur des exercices qui lui permettront d'évoluer vers un mode de justification attendu à son niveau scolaire. Nous appelons *parcours d'apprentissage*, la suite de tâches organisées pour répondre à un objectif d'apprentissage. Ainsi, notre troisième question de recherche est donc : comment construire des parcours d'apprentissage en pensant une progressivité dans la complexité des tâches proposées pour faire évoluer le mode de justification actuel d'un ou une élève vers le mode attendu à son niveau scolaire ? (QR3)

Les parcours d'apprentissage répondant aux besoins d'apprentissage des élèves, dans l'article de Jolivet *et al.* (2021), nous avons explicité leurs deux objectifs :

[...] Les besoins d'apprentissage correspondent donc à ce qui est à travailler par l'élève pour :

- favoriser la négociation de ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud, 1990) ;
- poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques pour résoudre des tâches du domaine nécessitant pour leur résolution la convocation de différents types de tâches (Castela, 2008) [...] (Jolivet *et al.*, 2021, p. 125).

Par conséquent, pour répondre à la question QR3, nous nous appuyons sur l'étude épistémologique, cognitive et didactique (partie II) nous permettant de déterminer ces ruptures d'ordre épistémologique d'une part, et, d'autre part, nous mobilisons la notion de complexité mathématique telle qu'introduite par Robert (2008) dans le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques et reprise à un niveau plus macro-didactique dans les travaux de Castela (2008, p. 153) en TAD. Nous utilisons la notion de complexité mathématique pour caractériser les tâches⁵ proposées aux élèves.

En effet, d'un point de vue cognitif, l'élève résolvant une tâche développe une activité composée d'actions, d'interactions avec d'autres élèves, avec l'enseignant ou enseignante, d'hypothèses, de décisions, de manières de gérer son temps, de son état personnel, etc. (Rogalski, 2008). Pour analyser cette activité *a priori*, on peut analyser la tâche prescrite par l'enseignant ou enseignante en termes de praxéologies mais aussi en prenant en compte le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 2008) et les sous-activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement (Robert & Vandebrouck, 2014). Plus la résolution d'une tâche nécessite de sous-activités de reconnaissance, d'organisation ou de traitement, et plus nous considérons *a priori* qu'elle est complexe du point de vue de l'élève. Par exemple, pour résoudre une tâche de géométrie, en plus de la

5. Bien que nous mobilisions des outils de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques, nous utilisons le mot « tâche » au sens de la TAD.

connaissance des propriétés des figures en jeu, il faut souvent être en mesure d'organiser son raisonnement et d'appliquer les propriétés dans leur domaine de validité.

En revenant au cadre de la TAD, Castela (2019) distingue deux types de variables pour décrire la complexité des tâches proposées aux élèves :

- des variables épistémo-pratiques qui « ont pour but de décrire l'étendue du type [de tâches], elles ne concernent pas le processus d'étude de la tâche » (Castela, 2019, p. 674), elles concernent les objets de savoir en jeu dans la tâche (par exemple, pour le type de tâches « calculer une longueur », ces variables peuvent décrire la nature de la mesure recherchée – nombre, inconnue, paramètre, etc. – ou encore les objets géométriques en jeu – segment d'un solide, d'une figure) – et/ou les raisons de l'existence d'une telle tâche (par exemple, une tâche relevant du type de tâches « calculer une longueur » peut être proposée car elle permet ensuite de calculer un volume) ;
- des variables didactiques qui peuvent notamment limiter les valeurs prises par les variables épistémo-pratiques (par exemple, en travaillant sur des nombres rationnels au lieu de travailler sur des réels) et permettent de caractériser plus largement les éventuelles adaptations et sous-activités au sens de Robert (2008).

Par la suite, nous proposerons également un double système de variables qui pourrait se rapprocher de celui de Castela (2019) sans chercher à le reprendre (cf. partie I.4 puis V.3). Pour répondre à QR3, nous nous appuierons donc sur les types de tâches identifiés dans le MPR auxquels nous ajouterons une caractérisation en termes de complexité mathématique. Ainsi, selon les besoins d'apprentissage identifiés pour un ou une élève, nous pourrions organiser une progression dans la complexité des tâches proposées.

4. Implémentation dans un EIAH

L'ensemble du travail présenté dans les parties I.1, I.2 et I.3 est implémenté dans l'EIAH MindMath. La dimension informatique de ce projet est donc double :

- d'une part, il faut modéliser didactiquement et informatiquement le savoir, les besoins d'apprentissage et les tâches. Nous entendons par « modèle », une représentation simplifiée et structurée d'une portion de la réalité ayant pour but de la décrire, de l'analyser ou de produire de nouveaux objets en lien avec cette portion de la réalité (par exemple un modèle des tâches qui permettrait de décrire mais aussi de générer des tâches). Ce modèle est dit didactique quand il mobilise des outils de la didactique des mathématiques (par exemple une structuration

praxéologique), il est dit informatique quand il peut être implémenté et utilisé par un ordinateur ;

- d'autre part, nous choisissons de nous placer dans un contexte de géométrie dynamique qui nous semble propice au passage d'une géométrie que nous qualifions pour le moment d'essentiellement perceptive à une géométrie essentiellement guidée par le raisonnement comme nous l'explicitons dans la partie III.

Ainsi, notre quatrième question de recherche est donc : comment modéliser didactiquement et informatiquement les savoirs en jeu, les besoins d'apprentissage des élèves, les tâches et les rétroactions⁶ pour construire des parcours d'apprentissage permettant aux élèves de faire évoluer leur mode de justification actuel vers un mode de justification idoine à leur niveau scolaire ? (QR4)

Pour répondre à cette question, nous nous appuyons sur le MPR pour modéliser le savoir en jeu, sur les modes de justification pour modéliser les besoins d'apprentissage des élèves, et sur le modèle T4TEL⁷ (Chaachoua, 2018) auquel nous ajoutons une caractérisation des types de tâches en termes de complexité pour modéliser les tâches.

Le modèle T4TEL s'inscrit dans le cadre de la TAD et propose une « formalisation du modèle praxéologique répondant à la double exigence, celle de calculabilité d'une part et celle de production de différents services EIAH d'autre part » (Chaachoua & Bessot, 2019, p. 235). Dans ce modèle, chaque praxéologie locale est décomposée en générateurs de types de tâches définis par un type de tâches, un ensemble de variables et les valeurs qu'elles peuvent prendre. Chaachoua et Bessot (2019) présentent par exemple le générateur de type de tâches « GT : [Calculer la somme de deux nombres ; V1, V2, V3] où V1 : nature des nombres (entiers naturels, entiers relatifs, décimaux) ; V2 : taille du premier nombre si entier (nombre de chiffres) et V3 : taille du second nombre si entier (nombre de chiffres) » (Chaachoua & Bessot, 2019, p. 238). Nous qualifions les variables du générateur de « variables de types de tâches » car elles permettent de définir des types de tâches.

Ainsi, pour continuer à répondre à QR4, après avoir défini des variables de types de tâches et leurs valeurs, nous pourrions modéliser informatiquement les praxéologies locales identifiées dans la construction du MPR par des générateurs de types de tâches. Pour arriver aux tâches proposées aux élèves, nous ajoutons au modèle T4TEL un jeu de

6. Nous n'aborderons pas la question des rétroactions ici, celle-ci fait l'objet de l'article de Jolivet *et al.* (2022).

7. T4 fait référence au quadruplet [Types de tâches ; Technique ; Technologie ; Théorie] et TEL à *Technology Enhanced Learning* (qui correspond au sigle EIAH dans le monde francophone).

variables de tâches et leurs valeurs qui s'appuie sur la notion de complexité mathématique (cf. partie V.3).

Nous définissons ainsi des modèles didactiques et informatiques du savoir en jeu (à partir du MPR), des besoins d'apprentissage des élèves (à partir des modes de justification) et des tâches (à partir des variables de types de tâches et de tâches). Ceux-ci nous permettent de définir le modèle des parcours d'apprentissage. Ce travail est présenté dans la partie V.

II. Étude épistémologique, cognitive et didactique de la géométrie plane à la transition cycle 3/cycle 4

Pour répondre aux quatre questions de recherche exposées dans la partie I, nous devons d'abord mener une étude épistémologique, cognitive et didactique de la géométrie plane à la transition cycle 3/cycle 4. Celle-ci fondera le MPR et les modes de justification présentés dans la partie IV mais aussi les modèles didactiques implémentés dans l'EIAH (cf. partie V).

Dans cette partie, nous commençons par caractériser les géométries en jeu au cycle 3 et au cycle 4 puis nous nous intéressons à un ensemble de types de tâches particulier pour travailler le passage d'une géométrie à l'autre.

I. Une double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique

Caractérisation de la double rupture épistémologique

Nous nous intéressons ici au passage de la géométrie physique à la géométrie théorique telles que décrites par Mathé *et al.* (2020) qui se traduit dans les classes par le passage d'une « géométrie des tracés matériels (sur papier ou sur écran) avec des instruments [à] la géométrie théorique des énoncés et démonstrations » (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 1). En France, ce passage est amorcé au cycle 3 mais reste essentiellement l'objectif du cycle 4 comme nous le verrons dans la partie IV.3.

Perrin-Glorian et Godin (2018) rapprochent les géométries physique et théorique des paradigmes géométriques G1 et G2 (Houdement & Kuzniak, 2006) rapprochés à leur tour des finalités pratiques et théoriques de la géométrie correspondant aux situations fondamentales de Brousseau (2000), celle du charpentier d'une part et des médiatrices de l'autre (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 4). En appui sur de précédents travaux dont ceux de Berthelot et Salin (1992) ainsi que ceux de Houdement et Kuzniak (2006), Mathé *et al.* (2020) définissent également deux types d'espaces dont traite la géométrie :

l'espace sensible « peuplé d'objets matériels sur lesquels on agit avec des instruments matériels » et l'espace de la géométrie axiomatique « constitué d'objets théoriques définis par des textes et reliés par des axiomes » (Mathé *et al.*, p. 28-29). En se situant dans l'espace de la géométrie axiomatique, on se place dans le cadre de la géométrie théorique. En revanche, si les problèmes de l'espace sensible peuvent être résolus dans ce même espace, il est également possible de modéliser un problème de l'espace sensible dans l'espace de la géométrie axiomatique puis d'interpréter les résultats obtenus dans l'espace sensible pour répondre au problème initial (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 5). En particulier, face à un même dessin de figure géométrique, il est possible de traiter le problème comme un problème de l'espace sensible ou comme un problème théorique (Mathé *et al.*, 2020, p. 29).

Le passage d'une géométrie à l'autre se traduit donc essentiellement par des modes de validation des énoncés différents. Dans la géométrie physique, la validation passe par la perception, éventuellement aidée d'instruments, qui porte sur des objets matériels ou graphiques, alors que dans la géométrie théorique, elle s'appuie sur un « discours logique à partir d'énoncés décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets » (Mathé *et al.*, 2020, p. 18).

En appui sur ces travaux (Houdement & Kuzniak, 2006 ; Mathé *et al.*, 2020), nous retenons l'idée qu'il existe donc une double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique. Cette rupture se présente en termes de fausses continuités et de discontinuités au sens de Grugeon (1997, p. 178). Elle est constituée d'une rupture concernant les objets géométriques et d'une rupture concernant les raisonnements géométriques. Ceci apporte un premier élément de réponse à QR1 qui posait la question des ruptures entre les géométries enseignées à la transition cycle 3/cycle 4. Dans les deux parties suivantes, nous étudierons plus en détails les deux aspects de cette rupture en nous appuyant sur des travaux issus de la didactique de la géométrie adoptant plusieurs approches (épistémologique, institutionnelle, cognitive). Cependant, il faut préciser qu'une rupture entre les géométries ne va pas de pair avec l'abandon de l'une d'entre elles. Ainsi, même des géomètres experts ou expertes peuvent se ramener à la géométrie physique selon les besoins. Houdement (2019) explique : « l'expert géométrique construit et résout des sous-problèmes dans G1 (notamment par décomposition/recomposition figurale et/ou dimensionnelle des figures qu'il lit ou trace, Duval 1994, 2005) pour résoudre des problèmes de G2 » (Houdement, 2019, p. 21). Il ne s'agit donc pas d'entrer dans la géométrie théorique en abandonnant la géométrie physique mais de savoir quand il convient de mobiliser l'une ou l'autre.

Rupture concernant les objets géométriques

Les objets de la géométrie plane travaillés du cycle 1 au cycle 4 semblent être les mêmes et portent d'ailleurs les mêmes noms (cercles, triangles, quadrilatères, etc.). Cependant, ils ne sont pas de même nature et leurs représentations n'ont pas le même statut.

En effet, si les objets de la géométrie physique sont des objets matériels (que l'on peut voir et éventuellement toucher), les objets de la géométrie théorique sont idéels (un point n'a pas de dimension, une droite est infinie, etc.). Lorsqu'un problème est donné dans l'espace de la géométrie axiomatique, il ne devrait donc être composé que de textes décrivant les propriétés d'une situation géométrique mettant en jeu ces objets idéels. Cependant, « ces objets textuels sont conventionnellement, par commodité [...] représentés par des schémas, à la "texture" identique aux dessins de la Géométrie I » (Houdement, 2007, p. 74). Ces schémas sont des représentations graphiques des objets idéels et n'ont alors pas le même statut que les objets de G1. Nous reprenons ici la distinction entre dessin et figure définie par Laborde et Capponi (1994) en appui sur le travail de Parzysz (1988) : « la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation [...]. La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier étant le référent, le second étant l'un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent » (Laborde & Capponi, 1994, p. 168). Ainsi, dans la géométrie théorique, ce que Houdement (2007) appelle « les schémas » mais qu'on peut aussi appeler « les dessins » de Laborde et Capponi (1994) doivent être considérés comme des représentations graphiques d'une classe d'objets idéels. Dans la géométrie physique, les dessins sont d'abord les objets-mêmes sur lesquels on travaille mais peuvent devenir à leur tour des représentants de classes d'objets (matériels) partageant les mêmes propriétés. Notons qu'on peut déjà commencer à voir l'intérêt de travailler dans un environnement de géométrie dynamique dans ce dernier cas puisque pour justifier qu'un programme de construction est valide, on ne peut plus se contenter d'une seule construction dans l'environnement papier-crayon alors qu'on peut utiliser la fonction de déplacement du logiciel de géométrie dynamique pour, à partir d'un seul dessin, en produire une infinité (cf. partie III.1).

Dès la fin du cycle 3, la question de savoir dans quelle géométrie il faut se placer n'a pas toujours de réponse simple. Ainsi, Houdement et Kuzniak (2006) ou encore Houdement (2007) décrivent plusieurs exercices de collège dans lesquels les questions posées se placent parfois dans l'espace sensible et parfois dans l'espace de la géométrie axiomatique, exigent parfois une réponse dans la géométrie physique (par exemple la construction d'un dessin) et parfois dans la géométrie théorique (par exemple le calcul d'une mesure

de longueur via le théorème de Thalès). Cela pose la question du rapport aux dessins accompagnant les énoncés et de ce que les élèves ont « le droit » d'y voir ou non. Ainsi, les élèves peuvent faire face à des règles subtiles et parfois contradictoires (Houdement, 2007, p. 69). Perrin-Glorian et Godin (2018) donnent un exemple de règles implicites tirées d'un manuel de mathématiques de 6^e (édité en 2009) :

Si on a tracé une figure en représentant avec des instruments une propriété géométrique demandée, on peut la coder et elle est supposée vérifiée : on a représenté une propriété géométrique sur une figure matérielle [...]. En revanche si la figure est donnée sans plus d'information, ni dans le texte, ni dans le codage, les caractéristiques visuelles, même vérifiées avec les instruments, ne peuvent pas être interprétées comme des propriétés géométriques : on peut seulement les conjecturer (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 7).

À cette rupture concernant les objets géométriques (leur nature et le statut de leurs représentations graphiques), s'ajoute une rupture concernant les raisonnements géométriques que nous étudions dans la partie suivante.

Rupture concernant les raisonnements géométriques

Un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières [...]. Reasonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses (Cabassut, 2005, p. 24).

Le raisonnement n'est donc pas le propre de la géométrie théorique, la géométrie physique a aussi ses propres raisonnements même si la validation reste empirique (Houdement, 2007, p. 74). Ainsi, Balacheff (1987) définit une preuve comme « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » (Balacheff, 1987, p. 2), il précise que la décision d'accepter cette explication peut faire l'objet d'un débat et nécessite de se mettre d'accord sur un système de validation commun. C'est ce système de validation qui crée une rupture entre la géométrie physique et la géométrie théorique. En effet, Balacheff (1987) parle de preuves pragmatiques quand l'élève réalise lui-même ou elle-même le contenu d'une affirmation pour la vérifier, et de preuves intellectuelles lorsqu'il n'y a pas de réalisation effective mais une « expression langagière des objets sur lesquelles elles portent et de leurs relations » (Balacheff, 1987, p. 12).

De la même manière que les élèves de collège peuvent avoir du mal à déterminer le rapport aux dessins à adopter selon l'énoncé de l'exercice à résoudre, le système de validation dans lequel se placer n'est pas non plus toujours explicite. L'exercice ci-après est tiré du manuel de 5^e Deltamaths (Magnard, 2016) :

18 **DEFI!**

Jane affirme qu'il est possible de trouver le centre du cercle symétrique du cercle rouge par rapport à O uniquement à l'aide d'une règle non graduée. Nathan pense que ce n'est pas possible. Qui a raison ?

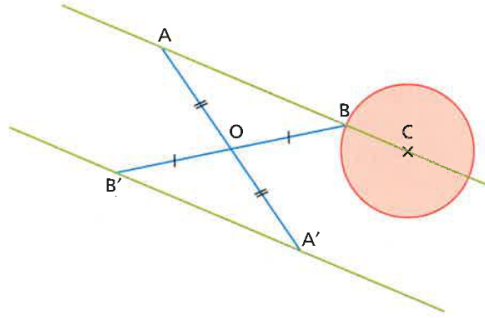


Figure 1. – Exercice de mathématiques

Énoncé : Jane affirme qu'il est possible de trouver le centre du cercle symétrique du cercle rouge par rapport à O uniquement à l'aide d'une règle non graduée. Nathan pense que ce n'est pas possible. Qui a raison ?

Deltamaths 5^e, Magnard, 2016, p. 197

(reproduit avec l'aimable autorisation des Éditions Magnard)

À supposer qu'une preuve soit demandée, il est difficile de savoir *a priori* si la construction effective à la règle non graduée sera considérée comme une réponse valide ou s'il faut mobiliser les propriétés de la symétrie centrale et les appliquer aux objets en jeu.

De plus, même si les élèves comprennent quel type de preuves est attendu, la forme du raisonnement peut également être un obstacle. En effet, l'un des objectifs de la fin du cycle 4 est l'initiation à la démonstration et Balacheff (1987) définit la démonstration comme « une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (Balacheff, 1987, p. 148). Une démonstration est donc nécessairement une preuve intellectuelle et met en jeu un raisonnement déductif qui est très codifié⁸. En effet, les pas du raisonnement déductif ont une structure ternaire et fonctionnent par substitution (Duval, 1993). Ainsi, dans le cas d'une démonstration, l'énoncé-tiers ou la règle d'inférence (définition, théorème,

8. Dans cette recherche, nous nous sommes concentrés sur l'implication directe ou *modus ponens*, bien que d'autres formes de raisonnement déductif existent et sont travaillées au cycle 4 (disjonction des cas, raisonnement par l'absurde).

axiome) s'applique si le contenu de ses prémisses correspond au contenu des prémisses du pas de raisonnement et sa partie « conséquence » est détachée pour former la conclusion du pas de raisonnement. Celle-ci peut alors devenir une prémisse d'un nouveau pas de raisonnement.

L'acquisition de cette forme de raisonnement reste compliquée pour les élèves de cycle 4 puis de lycée (nous citons les travaux de Cheng et Lin (2009) dans l'introduction, par exemple) et les programmes actuels du cycle 4 incitent d'ailleurs à « ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme » (MEN, 2020b, p. 126).

Aspects épistémologiques retenus pour le MPR

Nous avons dégagé des éléments épistémologiques liés aux figures et aux raisonnements géométriques. Ceux-ci nous permettront notamment de caractériser en partie les blocs technologico-théoriques de la praxéologie régionale de la géométrie plane à la transition cycle 3/cycle 4 (cf. partie IV).

De plus, nous pouvons commencer à répondre à QR1 : les ruptures épistémologiques, cognitives et didactiques entre les géométries enseignées à la transition cycle 3/cycle 4 concernent les figures géométriques et les raisonnements géométriques. Le passage d'objets matériels à des objets idéels ainsi que la distinction entre dessin et figure géométrique nous semblent des éléments clefs de la première rupture. Le mode de validation, le type de preuves et la forme du raisonnement attendu nous semblent des éléments clefs de la deuxième rupture. Nous donnerons un aperçu des ruptures institutionnelles dans la partie IV.3.

Nous avons également des premiers éléments de réponses à apporter à QR2 puisque les différents modes de justification relatifs à la praxéologie régionale de la géométrie plane sont caractérisés par les différents rapports aux dessins que nous avons repérés ainsi que les différents modes de validation et les différentes formes de raisonnement qu'un ou une élève peut mobiliser. Les modes de justification seront donc explicités à partir de ces éléments dans la partie IV.2.

2. Des tâches de construction pour entrer dans la géométrie théorique

Avec QR3, nous posons la question de la construction de parcours d'apprentissage et nous avons vu que notre objectif était de passer de la géométrie physique à la géométrie théorique. Les recherches s'intéressant à cette transition ne sont pas nouvelles et plusieurs propositions ont déjà été faites en France et à l'international : introduction du paradigme du physicien-géomètre entre G1 et G2 (Tanguay & Geeraerts, 2012), travail sur les fonctions explicative, de découverte ou de généralisation de la preuve (de Villiers,

2007), construction de solides en trois dimensions dans un contexte de géométrie dynamique (Mithalal, 2011), etc. Dans le cadre du projet MindMath, nous avons choisi de nous appuyer sur des tâches de construction de figures planes, celles-ci ayant déjà montré leur intérêt dans plusieurs recherches à la transition entre géométrie physique et théorique (Coutat *et al.*, 2016 ; Gousseau-Coutat, 2006 ; Perrin-Glorian & Godin, 2018).

Nous entendons par « tâche de construction », la production d'un dessin avec des outils de construction (dans l'environnement papier-crayon ou informatique) à partir d'un énoncé et/ou d'un schéma codé décrivant tout ou une partie des propriétés de la figure géométrique référente⁹. Par exemple : « construis un triangle rectangle avec un angle de 29° ».

Au cycle 4, l'enjeu d'une tâche de construction telle que nous l'entendons, en plus de la correction de la figure, est la preuve (potentiellement en acte) de la constructibilité des objets géométriques en jeu (la précision du dessin, n'est par contre, plus réellement un attendu). En reprenant l'exercice de la Figure 1, une preuve en acte de la constructibilité des objets géométriques correspondrait au tracé effectif du point symétrique uniquement à la règle non graduée, il s'agit donc d'une preuve pragmatique. Dans les tâches de construction que nous proposons, la question de l'existence des objets géométriques n'est jamais posée explicitement, les élèves ne doivent pas écrire un programme de construction mais doivent construire les figures demandées. De même, nous ne demandons pas une preuve que la figure proposée est conforme à l'objectif, les élèves ne doivent donc pas justifier que leur construction correspond bien au problème posé. Cependant, nous considérons que ces tâches de construction peuvent constituer une première étape avant de mettre les élèves en situation de validation pour produire une preuve intellectuelle de la correction et de la constructibilité des objets en jeu. Ce choix est également dû à des contraintes techniques puisque dans la première version de MindMath, nous étions limités à une tâche par exercice (une tâche de construction donc) mais l'ajout d'une tâche en lien avec la preuve de constructibilité était un développement envisagé du projet. Nous avons proposé ces tâches sous la forme de questions du type « comment sais-tu que ta construction est correcte ? Sur quelles propriétés t'appuies-tu ? » dans l'environnement papier-crayon lors d'expérimentations ciblées alors que la plateforme était en cours de développement, ce que nous n'évoquons pas ici mais qui est développé dans la thèse sur laquelle s'appuie cet article (Lesnes-Cuisiniez, 2021, p. 253-311).

Ainsi, puisqu'elles exigent la production d'un dessin, les tâches de construction sont des tâches de la géométrie physique et comme Mathé *et al.* (2020), nous nous interrogeons sur « les conditions favorables pour que le travail sur les figures qui est conduit en géométrie

9. Contrairement aux tâches de restauration et reproduction de figures pour lesquelles on identifie les propriétés de la figure à représenter sur un de ses dessins (qui n'est pas un schéma codé) (Godin & Perrin-Glorian, 2008).

physique puisse préparer celui en géométrie théorique plutôt que de se constituer en obstacle didactique » (Mathé *et al.*, p. 43). Nous nous plaçons ainsi dans la continuité des travaux autour de la géométrie des tracés (Perrin-Glorian & Godin, 2018) :

La géométrie des tracés se caractérise par l'usage géométrique des instruments (hormis les instruments de mesure) pour tracer des figures matérielles dans l'espace graphique [...]. L'idée générale est qu'il est possible de prendre appui sur la reproduction instrumentée de figures pour avancer vers la conceptualisation des objets de la géométrie théorique, dans un développement mutuel des techniques de construction avec les instruments et des concepts géométriques (Mathé *et al.*, 2020, p. 56).

Dans le cadre de la géométrie des tracés, Perrin-Glorian et Godin (2018) limitent les instruments de géométrie utilisés aux instruments de tracé en excluant les instruments de mesure de longueur. À quelques exceptions près¹⁰, nous reprenons ce choix pour les longueurs mais nous conservons le rapporteur (que nous appellerons « constructeur d'angle » dans l'environnement de géométrie dynamique), notre enjeu étant de faire produire aux élèves des dessins de figure à une similitude près.

À partir d'un énoncé textuel, éventuellement accompagné d'un schéma codé, l'élève doit donc repérer les propriétés que devra vérifier la figure représentée par son dessin (par exemple, si l'énoncé demande la construction d'un triangle isocèle, il faut que le triangle ait deux côtés de même longueur) et déterminer quels instruments utiliser pour y arriver. Or, comme Perrin-Glorian et Godin (2018), nous jouons sur les instruments à disposition, d'une part pour faire travailler les élèves sur l'usage géométrique des instruments et, d'autre part, pour bloquer la mise en œuvre de certaines techniques et ainsi imposer des raisonnements nécessitant parfois plusieurs adaptations des connaissances au sens de Robert (2008). Par exemple, nous proposons la tâche suivante : « à partir d'un côté [AB] donné, construis un triangle ABC isocèle en A et tel que $\widehat{BAC} = 60^\circ$ » en ne permettant pas d'utiliser le constructeur d'angle. Pour pouvoir construire un tel triangle, il faut comprendre qu'il est équilatéral grâce à plusieurs propriétés des triangles. Cette compréhension peut mettre en jeu, ou non, le raisonnement déductif selon que l'élève parte des données de l'énoncé pour en déduire que le triangle cherché peut exister et qu'il est équilatéral ou selon que l'élève parte du triangle construit (en utilisant son rapporteur dans l'environnement papier-crayon ou en procédant à une construction molle (cf. partie III.1) dans l'environnement de géométrie dynamique, par exemple) puis analyse le triangle obtenu pour déterminer la nature du triangle à construire.

10. L'EIAH que nous concevons étant à destination d'élèves de collège, certaines tâches de construction permettent de travailler le théorème de Pythagore ou l'inégalité triangulaire, ce qui implique le calcul de certaines mesures de longueurs.

Pour répondre à QR3, nous nous appuyons donc sur des tâches de construction dont nous faisons varier la complexité mathématique en jouant sur la nature de la figure à construire, sur les données de l'énoncé (données numériques et propriétés visées explicitement), sur la désignation de la figure et sur les instruments à disposition. Il nous semble que la façon dont les propriétés géométriques sont mobilisées pour résoudre ces tâches pourra être mise en lien, ultérieurement, avec leur utilisation dans les démonstrations. En cela, nous nous rapprochons des travaux de Coutat *et al.* (2016) pour qui « une étape de construction est structurellement identique à un pas de raisonnement déductif » (Coutat *et al.*, 2016, p. 204). Nous ne développerons pas ces aspects car seules les tâches de construction ont été conçues pour le moment dans l'EIAH MindMath.

III. Propriétés de la géométrie dynamique à la transition entre géométrie physique et géométrie théorique

L'étude épistémologique, cognitive et didactique à la transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique que nous avons présentée dans la partie précédente ne dépend pas de l'environnement (papier-crayon ou géométrie dynamique). Nous nous plaçons d'ailleurs dans la continuité de travaux proposés dans l'environnement papier-crayon par Perrin-Glorian et Godin (2018). Cependant, pour le projet MindMath, nous avons conçu un EIAH et donc proposé des tâches de géométrie dans un environnement de géométrie dynamique qui a ses propres spécificités. Dans cette partie, nous en développons quelques-unes en explicitant leurs intérêts pour la transition entre les géométries physique et théorique. Ceci nous permettra d'expliquer certains aspects du MPR et surtout des modes de justification qui caractérisent le rapport à la géométrie des élèves dans l'EIAH MindMath (partie IV). Nous pouvons également préciser les variables sur lesquelles nous jouons dans la conception des exercices pour répondre à QR3.

Nous nous intéressons ici à un logiciel de géométrie dynamique, c'est-à-dire qui permet de construire, d'afficher et de déplacer des objets directement à l'aide de la souris¹¹. Ce type de logiciels reste dans le paradigme G1, la géométrie physique, parce que les mathématiques ne peuvent pas les régir complètement, notamment à cause des approximations numériques qui vont avec une implémentation sur un ordinateur (Houdement & Kuzniak, 2003). Cependant, selon Lagrange et C.-Dedeoğlu s'appuyant sur Laborde (1999), ces logiciels « obéissent aux règles de la géométrie euclidienne » (Lagrange & C.-Dedeoğlu, 2009, p. 198). Les constructions y sont, en effet, beaucoup plus contraintes

11. Dans le cadre de l'EIAH MindMath, nous avons travaillé avec le logiciel Cabri mais tout ce que nous présentons dans cet article est valable avec le logiciel GeoGebra.

mathématiquement que dans l'environnement papier-crayon, ce que nous allons développer par la suite.

1. Le déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique

Le déplacement des objets (points, segments, polygones, etc.) à l'écran est un aspect central des logiciels de géométrie dynamique. En effet, ce déplacement ne conserve que les propriétés utilisées dans la construction des objets et celles qui en sont déduites (par exemple, si on construit un quadrilatère avec trois angles droits, le déplacement va conserver ces trois angles droits ainsi que le quatrième en appliquant la propriété « un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle »). Une construction qui conserve toutes les propriétés que l'utilisateur ou l'utilisatrice voulait lui attribuer est appelée une construction robuste. Au contraire, lorsque l'objet à l'écran ne conserve pas certaines propriétés que l'utilisateur ou l'utilisatrice pensait implémentées, on dit qu'il se déforme. Ainsi, le déplacement offre une rétroaction importante à l'élève en disqualifiant les procédures « au jugé » et en mettant en évidence des invariants géométriques (Laborde & Capponi, 1994). Il favorise également la distinction entre dessin et figure car une seule construction permet de produire une infinité de dessins qui représentent la même figure.

Dans l'EIAH MindMath, nous visons une construction robuste des figures au sens défini juste avant. Cependant, il existe un type de constructions dites molles (Laborde, 2005). Celles-ci sont obtenues en déplaçant les points des objets jusqu'à percevoir une configuration faisant apparaître certaines propriétés (Gousseau-Coutat, 2006, p. 67). Ces propriétés ne sont pas conservées lors du déplacement car elles ne font pas partie de l'objet construit lui-même, elles sont liées à un dessin particulier. Les constructions molles peuvent être utiles dans une phase heuristique lorsque l'utilisateur ou l'utilisatrice ne sait pas encore quelles propriétés et/ou quels outils utiliser pour une construction robuste. S'il est possible que des élèves passent par ce type de constructions dans le cadre de l'EIAH MindMath, nous attendons ensuite qu'ils ou elles identifient les propriétés et outils à utiliser pour produire une construction robuste.

2. Les outils de construction d'un logiciel de géométrie dynamique

Le déplacement ne conservant que les propriétés utilisées dans la construction des objets (et celles qui en sont déduites), il est nécessaire de pouvoir communiquer ces propriétés au logiciel. Ceci se fait au moyen d'outils (appelés aussi « primitives » ou « commandes » dans certaines recherches). Ces outils portent le nom des objets qu'ils permettent de construire (« point », « segment », « angle » pour le constructeur d'angle dont nous avons déjà parlé) ou de propriétés géométriques (« perpendiculaire », « parallèle », etc.).

L'outil permettant de déplacer les objets construits à l'écran est symbolisé par une flèche (il peut s'appeler « pointeur » ou « déplacer »). D'autres outils servent à mesurer (un angle, une longueur, une aire, etc.) ou à gérer l'affichage à l'écran (écrire du texte, afficher/masquer un objet, etc.). Il est important que les élèves apprennent à les manipuler dans le cadre d'autres exercices utilisant un logiciel de géométrie dynamique mais nous ne nous attarderons pas dessus dans cet article.

Encore plus facilement que dans l'environnement papier-crayon, il est possible d'interdire aux élèves d'utiliser certains outils ou d'en imposer d'autres en modifiant la barre d'outils à leur disposition. C'est une des variables sur lesquelles nous jouons dans la conception des tâches de construction pour décourager certaines procédures et imposer certains raisonnements comme nous l'avons vu dans la partie II.2. Il faut noter cependant que la restriction des outils à disposition couplée à la facilité d'obtenir des objets à l'écran (il suffit de quelques clics, ce qui est beaucoup moins contraignant que dans l'environnement papier-crayon) peut amener des élèves à travailler par essais-erreurs :

Tout se passe comme si le tâtonnement, en milieu informatique, était non seulement valorisé par le fait qu'il devient moins coûteux, plus efficace, mais aussi se trouvait anobli, médiatisé qu'il est par l'intervention du milieu informatique, donc faisant intervenir des instruments et des modes d'action plus élaborés que le tâtonnement en papier/crayon (Artigue, 1991, p. 19).

Ainsi, l'utilisation des outils n'est pas la preuve d'un raisonnement géométrique (Laborde & Capponi, 1994, p. 186). Néanmoins, les propriétés des logiciels de géométrie dynamique sont telles qu'une construction obtenue par tâtonnement peut être reproduite en utilisant les règles de la géométrie euclidienne (Osta *et al.*, 1998). Un ou une élève qui tâtonnerait en utilisant les outils de façon non réfléchie jusqu'à représenter la figure demandée a donc l'assurance qu'il existe une construction robuste « minimale » de cette figure.

En nous appuyant sur Balacheff (1994) qui définit la réification de connaissances comme la « visualisation et manipulation directe d'entités abstraites donnant à voir des comportements évocateurs de leurs propriétés » (Balacheff, 1994, p. 367), les outils de construction et le déplacement dans un environnement de géométrie dynamique nous paraissent réifier les propriétés des figures géométriques. De plus, ils permettent de mieux mettre en évidence la distinction entre dessin et figure. Ces éléments nous semblent participer à la transition entre géométrie physique et théorique.

IV. Modèle praxéologique de référence et modes de justification relatifs aux constructions de figures planes

Dans cette partie, nous terminons de répondre à QR1 et QR2. Ainsi, nous explicitons le MPR relatif aux constructions de figures planes à partir des éléments épistémologiques, cognitifs et didactiques repérés dans la partie II et complétés dans la partie III, ce MPR nous permet par la suite d'étudier les programmes scolaires en vigueur dans la partie IV.3 et ainsi donner les derniers éléments de réponse de QR1. Pour répondre à QR2, nous définissons *a priori* des modes de justification à partir des mêmes éléments épistémologiques, afin de caractériser le rapport à la géométrie des élèves de cycle 4 et leurs besoins d'apprentissage lorsqu'ils et elles résolvent des tâches de construction.

I. Modèle praxéologique de référence relatif aux figures planes

Comme nous l'avons vu dans la partie I.1, le domaine mathématique est composé de praxéologies globales. La géométrie est une de ces praxéologies globales. Pour structurer le MPR, nous avons ensuite fait le choix de distinguer deux praxéologies régionales : l'une relative aux figures planes, l'autre aux solides géométriques. Enfin, nous définissons une praxéologie locale relative à la construction de figures planes et une autre relative à la preuve mettant en jeu des figures planes (ce ne sont pas les seules praxéologies locales). Dans cette partie, nous tentons de caractériser les éléments de la praxéologie locale relative à la construction de figures planes.

La description praxéologique que nous proposons pour la praxéologie locale de construction n'est pas exhaustive, le but est de rendre compte des principaux types de tâches et des points communs à la majorité des techniques et technologies qui peuvent être mobilisées dans leur résolution. La caractérisation précise de chaque praxéologie ponctuelle a cependant été nécessaire pour l'implémentation dans l'EIAH MindMath.

La praxéologie locale de construction se décompose d'abord en types de tâches génériques : construire un cercle ; construire un triangle ; construire un quadrilatère, etc. Nous ne présenterons ici que ce qui concerne les triangles. Nous opérons alors un premier découpage selon la nature du triangle à construire et un deuxième découpage selon les données de l'énoncé, y compris la nature du triangle indiquée dans l'énoncé (qui ne correspond pas forcément à la nature la plus précise du triangle). En nous plaçant dans le cadre T4TEL (Chaachoua, 2018), on peut écrire le générateur suivant : $GT_{tri} = [\text{construire un triangle} ; V1, V2]$ avec $V1$ la nature du triangle, $V2$ les données de l'énoncé (côtés et angles uniquement ici) et la désignation du triangle. Par exemple, pour le type de tâche correspondant à la valeur de $V1$ « triangle équilatéral », nous pouvons générer les sous-types de tâches suivants en instanciant la variable $V2$:

- construire un triangle équilatéral, désigné comme « triangle équilatéral », un côté étant donné ;
- construire un triangle équilatéral, désigné comme « triangle isocèle », un côté différent de la base et un angle de la base de 60° étant donnés ;
- construire un triangle équilatéral, désigné comme « triangle isocèle », la base et l'angle au sommet de 60° étant donnés ;
- construire un triangle équilatéral, désigné comme « triangle isocèle », la base et un angle de la base de 60° étant donnés.

Il n'existe pas une unique technique permettant de construire l'ensemble des triangles à partir de leurs côtés et/ou de leurs angles au cycle 4. C'est pourquoi nous présentons une technique générale dont les différentes étapes peuvent être facultatives et/ou se dérouler dans un autre ordre que celui que nous proposons ci-dessous. À noter que comme nous le précisons dans la partie II.2, les tâches de construction que nous proposons à l'heure actuelle n'exigent pas une preuve de la constructibilité des figures en jeu. L'objectif de la technique que nous présentons est donc de produire un dessin représentant la figure décrite dans l'énoncé et/ou par un schéma codé :

- faire un schéma codé de la figure à partir des données de l'énoncé ;
- identifier les propriétés de la figure à mobiliser pour la construction. Celles-ci peuvent correspondre à la définition du triangle désigné dans l'énoncé (par exemple « un triangle isocèle a deux côtés de même longueur ») ou être mobilisées par l'élève lui-même ou elle-même (par exemple, la propriété de la somme des angles dans un triangle) ;
- calculer les éventuelles mesures d'angles ou de longueurs manquantes ;
- associer les propriétés géométriques à mobiliser aux instruments présents dans le milieu ;
- utiliser les instruments pour produire le dessin.

Bien qu'une construction consiste en une preuve pragmatique de la constructibilité d'une figure géométrique, elle peut mobiliser des propriétés mathématiques identiques à celles qui seraient mobilisées dans une preuve intellectuelle de la constructibilité. Celles-ci peuvent être communes à tous les triangles (inégalité triangulaire, somme des mesures des angles, etc.) ou spécifiques à certaines familles de triangles (égalité des angles à la base d'un triangle isocèle, théorème de Pythagore dans un triangle rectangle, etc.). Elles peuvent être ou non suggérées par l'énoncé (par exemple, si l'énoncé évoque un triangle équilatéral, nous faisons l'hypothèse que la définition « un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur » est suggérée alors que la propriété de la somme des angles ne l'est pas).

2. Modes de justification relatifs à la praxéologie locale de construction de figures planes

Nous avons caractérisé la praxéologie locale de construction de figures planes à partir de ses types de tâches, de ses techniques et de son bloc technologico-théorique. Dans cette partie, nous définissons *a priori* des modes de justification des élèves selon cette praxéologie locale. Ceux-ci caractérisent le rapport à la géométrie, et ici en particulier à la construction de figures planes, d'un ou une élève par rapport à ce qui est attendu. Dans le cadre de notre recherche, le mode de justification attendu correspond au cycle 4. Les autres modes de justification sont liés à des besoins d'apprentissage, ce qui nous permet de répondre à QR2.

Nous définissons ainsi trois modes de justification :

- CO0¹² : un mode ancien qui correspond à une construction au jugé et validée par la perception visuelle du dessin tracé (sans déplacement puisque celui-ci déformerait la construction) ;
- CO1 : un mode incomplet qui correspond à une construction *restant* dans le paradigme des constructions molles au sens de Laborde (2005) et/ou ayant recours à une utilisation non réfléchie des outils de constructions. Dans le premier cas, la validation est visuelle (le déplacement déformerait la construction), dans le deuxième cas, il peut y avoir une validation par le déplacement adéquat¹³ ou partiel des points à l'écran ;
- CO2 : un mode attendu qui correspond à une construction robuste validée par le déplacement adéquat des points à l'écran.

Comme nous l'avons vu, bien que plus « assurée » (par la nature-même du logiciel de géométrie dynamique) que la constatation d'une « coïncidence visuelle », le déplacement des points à l'écran reste une validation de la géométrie physique. C'est cependant ce qui est attendu des élèves de cycle 4 dans une tâche de construction qui ne pose pas explicitement la question de la constructibilité.

Afin de repérer le mode de justification d'un ou une élève relatif à la construction de figures planes, nous avons défini des indices en lien avec les éléments épistémologiques, cognitifs et didactiques relevés dans les parties II et III. Ces indices sont à repérer dans les productions des élèves pour inférer leur mode de justification, plus précisément dans ce

12. CO pour « construction ».

13. De tous les points et dans toutes les directions.

que font ou ne font pas les élèves lors de la résolution de la tâche (on peut repérer automatiquement les outils utilisés, les déplacements de souris, etc.) et dans la production finale (au moment où l’élève appuie sur le bouton « valider »). Plus le nombre de productions analysées est important pour un ou une même élève, plus nous pouvons relever d’indices et inférer précisément les modes de justification de l’élève selon les différentes praxéologies locales.

Tableau 1. – Indices et modes de justification associés

Indices sur	Mode CO0	Mode CO1	Mode CO2
Schéma codé			Utilisation d’un schéma codé
Type de construction	Au jugé	Construction molle	Construction robuste
Outils utilisés pour la construction	Uniquement outils pour construire directement des objets (points, segments, etc.)	Utilisation combinatoire des outils de construction	Utilisation réfléchie des outils de construction
Validation de la construction	Pas de validation ou validation visuelle d’un dessin	Validation utilisant le déplacement	Validation utilisant adéquatement le déplacement

3. Étude de la double rupture épistémologique dans les programmes scolaires de cycle 3 et 4

Pour achever de répondre à QR1, nous donnons ici un aperçu¹⁴ des ruptures institutionnelles dans le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique qui nous semble particulièrement travaillé à la transition entre le cycle 3 et le cycle 4. En effet :

Au cycle 4, l’élève s’appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s’oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement (MEN, 2016).

En nous appuyant sur les programmes scolaires des cycles 3 et 4 en vigueur à la rentrée 2023 (MEN, 2020a ; 2020b) et des documents d’accompagnement (MEN, 2016 ; 2018), nous nous concentrons sur les liens entre constructions géométriques et raisonnement déductif dans la continuité de l’angle d’approche que nous avons choisi pour construire les parcours d’apprentissage.

14. L’analyse fine est dans la thèse de Lesnes-Cuisiniez (2021, p. 128-178).

Constructions géométriques dans les programmes scolaires

Au cycle 3, « reproduire, représenter, construire [...] des figures simples ou complexes » (MEN, 2020a, p. 98) font partie des compétences attendues. Quelques exemples de constructions de triangles sont donnés dans les attendus de fin de 6^e : construire un triangle isocèle, la base et un côté différent de la base étant donnés ; construire un triangle, les trois côtés étant donnés (MEN, 2019a, p. 15). Les côtés donnés le sont avec une mesure de longueur en centimètres. Les techniques ne sont pas précisées mais il est indiqué que « les élèves sont confrontés à la nécessité de représenter une figure à main levée avant d'en faire un tracé instrumenté » (MEN, 2019b, p. 8). Aucun bloc technologico-théorique n'est associé aux constructions de triangles.

Au cycle 4, nous retrouvons la « construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles » (MEN, 2020b, p. 136). Ce type de tâches est associé à une liste de connaissances comprenant des propriétés des triangles (somme des angles, inégalité triangulaire, théorème de Pythagore, etc.). Dans les repères annuels de progression du cycle 4, le type de tâches construire un triangle à partir de la mesure de « trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle » (MEN, 2019c, p. 11) est associé à un élément technologique : la propriété de l'inégalité triangulaire (en 5^e) et les cas d'égalité des triangles (en 4^e). Aucun élément de technique n'est donné. Nous remarquons ainsi que, selon le cycle, l'importance est donnée à la technique (au cycle 3) ou au bloc technologico-théorique (au cycle 4).

Liens entre constructions géométriques et raisonnement déductif dans les programmes scolaires

Au cycle 3, le raisonnement est travaillé à travers différentes tâches dont les tâches de construction de figures planes. Les documents d'accompagnement précisent quelques variables didactiques (comme nous avons pu le faire dans la partie II.2) afin d'envisager une certaine progressivité : support, nature des figures et des éléments qui la composent, éléments directement visibles ou « à trouver », instruments autorisés, échelle, amorce ou non, etc. (MEN, 2018, p. 5). Ce même document indique que « l'utilisation des outils de construction est un enjeu majeur de l'enseignement de la géométrie [...]. Le choix des instruments peut être laissé ou non à l'initiative des élèves » (MEN, 2018, p. 6).

Au cycle 4, les liens entre constructions géométriques et raisonnement déductif (enjeux du cycle) sont assez généraux. Bien qu'un document d'accompagnement des programmes appuie sur l'importance des problèmes de construction qui permettent notamment de développer « l'aptitude à observer une figure et à la représenter dans le modèle géométrique abstrait pour y raisonner » (MEN, 2016, p. 4), il ne donne aucune indication sur

les variables didactiques et les conditions pour que ces tâches motivent effectivement le recours à un raisonnement déductif.

Dans les deux cycles, nous remarquons ainsi qu'un lien entre constructions géométriques et raisonnement déductif est fait via les programmes (ou protocoles) de construction qui font partie des attendus de fin d'année de la 6^e à la 4^e. Écrire un programme de construction peut ainsi permettre d'explicitier le raisonnement mis en œuvre dans la construction de la figure et d'identifier les propriétés en jeu. Cependant, ce lien reste implicite et donc à la charge des enseignants et enseignantes.

V. Modèles didactiques implémentés dans l'EIAH

Dans cette partie, nous répondons à QR4 en nous appuyant sur ce que nous avons présenté pour concevoir des modèles didactiques et informatiques des savoirs, des besoins d'apprentissage et des tâches, implémentés dans l'EIAH MindMath. Cet EIAH n'a pas pour vocation de se substituer à l'enseignant ou enseignante mais d'accompagner le cours. Il ne se limite pas à la géométrie, ni aux constructions de figure mais c'est cet aspect que nous développons par la suite dans la continuité des travaux présentés dans cet article.

I. Modèle didactique du savoir

Le modèle du savoir construit pour l'EIAH MindMath s'appuie sur le MPR présenté dans la partie IV.1. La géométrie est ainsi composée de praxéologies régionales et locales dont les praxéologies locales de construction de figures planes et de preuve mettant en jeu les figures planes. Au sein de la praxéologie locale de construction, nous avons déjà évoqué une structuration des types de tâches selon la nature du triangle à construire et selon les données de l'énoncé. De plus, afin de modéliser le fait qu'une technique de résolution puisse mobiliser des propriétés propres à la nature du triangle à construire ou des propriétés relatives à un triangle de nature « plus générale », nous adoptons une structuration par les angles : les triangles « quelconques » correspondent à l'ensemble des triangles. Certains peuvent être rectangles (s'ils ont un angle droit) ou isocèles (s'ils ont deux angles égaux). Les triangles isocèles rectangles forment une sous-famille des triangles rectangles et des triangles isocèles. Les triangles équilatéraux forment une sous-famille des triangles isocèles.

2. Modèle didactique des besoins d'apprentissage de l'élève

Le modèle didactique de l'activité géométrique de l'élève que nous proposons s'appuie sur les modes de justification présentés dans la partie IV.2. Nous les avons définis *a priori* selon chacune des praxéologies locales de la praxéologie régionale de géométrie plane.

Aux modes de justification non attendus correspondent des besoins d'apprentissage. L'activité géométrique d'un ou une élève est donc représentée par un n-uplet de modes de justification. À ce n-uplet, nous ajoutons des catégories d'erreurs récurrentes repérées par l'EIAH à partir de l'analyse didactique *a priori*.

À chaque fois qu'un ou une élève résout une tâche d'un parcours d'apprentissage, sa production est automatiquement codée à partir de traces relevées dont l'interprétation est définie *a priori* (cf. partie IV.2). Ce diagnostic local permet d'y associer un ou plusieurs modes de justification en fonction des praxéologies locales en jeu dans la technique de résolution. Ce même fonctionnement est appliqué à l'ensemble des tâches résolues par l'élève, ce qui permet de définir un mode de justification dominant sur chacune des praxéologies locales en jeu. Il faut donc qu'un ou une élève résolve un nombre suffisamment important de tâches issues d'une même praxéologie locale pour que l'interprétation de son mode de justification soit pertinente.

3. Modèle didactique des tâches

Structuration du modèle didactique des tâches

La structuration du modèle didactique des tâches s'appuie sur le modèle T4TEL (Chaachoua, 2018). Ainsi, chaque praxéologie locale est décomposée en générateurs de types de tâches auxquels sont associées des variables de types de tâches. Nous nous intéressons ici au générateur de types de tâches lié au type de tâches « construire un triangle à partir de ses angles et de ses côtés » : $GT_{tri} = [Construire, un triangle ; VT1, VT2]$. VT1 est la variable de type de tâches « nature du triangle à construire » et VT2 est la variable de type de tâches « données de l'énoncé pour construire le triangle (y compris la désignation du triangle) ». En faisant varier la valeur de ces variables de types de tâches, nous définissons des types de tâches que nous qualifions de génériques.

Le découpage en types de tâches n'est pas suffisant pour construire les parcours. À l'instar des variables de types de tâches (VT) du modèle T4TEL qui permettent de générer des types de tâches à partir d'un générateur de types de tâches, nous caractérisons les tâches par ce que nous appelons des variables de tâches (Vt). Pour un type de tâches donné, les variables de tâches permettent de caractériser la portée des techniques en jeu dans la résolution des tâches ainsi que leur complexité mathématique. Concernant la portée des techniques, nous définissons donc deux variables de tâches :

- Vt_P1 : la position des éléments de la figure déjà construits. Cette variable est essentiellement liée à la limitation de la portée des techniques perceptives. En effet, une position non prototypique du triangle rend plus difficile l'appui sur les horizontales ou verticales et sur des images canoniques de certains types de triangles ;

- Vt_P2 : les outils de construction à disposition dans le milieu. En retirant certains outils de construction, nous pouvons empêcher l'utilisation de certaines propriétés pour favoriser l'utilisation des propriétés visées par la tâche comme nous l'avons vu dans la partie II.2 en limitant par exemple l'utilisation du constructeur d'angle.

Concernant la complexité mathématique des tâches, nous nous appuyons en plus sur les adaptations des connaissances au sens de Robert (2008). Nous définissons ainsi deux variables qui n'ont pas encore été présentées :

- Vt_C2 : registre de représentation de l'énoncé. Nous faisons l'hypothèse que proposer un énoncé dans le langage naturel ou un schéma codé n'implique pas la même complexité mathématique ;
- Vt_C3 : présence d'objet(s) géométrique(s) externe(s) à la figure à construire (quadrillage, figure à l'intérieur de laquelle il faut construire, etc.).

À noter que les valeurs des variables de tâches liées à la portée des techniques influencent également la complexité de la famille de tâches.

Afin de faciliter le travail sur les parcours d'apprentissage par la suite, nous définissons également une variable Vt_C1 qui correspond au nombre minimum de propriétés à mobiliser pour résoudre la tâche. Nous ne jouons pas sur la valeur de cette variable pour créer des tâches mais celle-ci constitue une synthèse des autres variables de tâches et contribue à l'organisation des parcours d'apprentissage.

Pour la praxéologie locale de construction, en particulier ce qui concerne les triangles, nous définissons ainsi des types de tâches en instanciant les variables de types de tâches VT1 et VT2 puis des tâches en instanciant les variables Vt_P1, Vt_P2, Vt_C2 et Vt_C3. De ces combinaisons, nous ne conservons que les tâches qui permettent de construire une figure ou de conclure à sa non existence et qui sont pertinentes du point de vue des programmes scolaires du collège en 2020. Nous construisons ainsi des familles de tâches dont la résolution est immédiate et des tâches visant le passage d'une technique à une autre en jouant sur leur portée et la technologie en jeu, ou demandant la mobilisation de techniques mettant en jeu les mêmes propriétés mais plus ou moins complexes. Concernant l'énoncé des tâches, nous faisons le choix de toujours les situer à un niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponible (Robert, 2008), c'est-à-dire que les connaissances à utiliser ne sont pas indiquées. Cependant, elles peuvent être prises en charge par des rétroactions, ce que nous développons dans l'article de Jolivet *et al.* (2022).

Bien que l'identification des variables de types de tâches et de tâches de notre modèle ainsi que la mise en évidence de différents rôles de ces variables dans la conception des tâches et dans l'impact sur l'activité des élèves soient des résultats de notre travail, il nous semble que ce qui pourrait être qualifié de variables de types de tâches ou de tâches dépend à la fois de l'histoire de la conception de l'EIAH et des besoins identifiés. Ainsi, ce qui nous paraît surtout important de retenir de cette partie est l'idée d'une définition des tâches en plusieurs étapes à partir des variables identifiées. Cette structuration permet de faciliter la construction des parcours d'apprentissage abordée dans la partie suivante.

Un exemple de tâche

Le diagnostic local du n-uplet des modes de justification de l'élève est basé sur une analyse didactique *a priori*. Pour chaque tâche implémentée dans l'EIAH, nous déterminons donc les techniques attendues et erronées possibles associées à des technologies attendues ou erronées. Nous déterminons également les indices à relever dans la production de l'élève afin de permettre au logiciel de les associer à une technique/technologie préalablement définie. Nous explicitons ce travail d'analyse *a priori* sur une tâche déjà évoquée dans la partie II.2 et qui a été générée à partir des valeurs de variables suivantes :

- VT1 : un triangle équilatéral ;
- VT2 : désignation « triangle isocèle », côté non base et angle au sommet ;
- Vt_P1 : le côté non base en position non prototypique ;
- Vt_P2 : outil de report de longueur ;
- Vt_C1 : 4 (dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ; la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° ; si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral ; un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur) ;
- Vt_C2 : énoncé dans le langage naturel (angle donné sous la forme d'une mesure) ;
- Vt_C3 : pas d'objets externes.

Un exemple de cette tâche est représenté sur la figure 2¹⁵.

15. Il ne s'agit que d'un exemple possible car après avoir déterminé les valeurs des variables de types de tâches et de tâches, les tâches proposées aux élèves sont générées en choisissant aléatoirement les nombres en jeu et la position des objets déjà dessinés sur l'écran (en respectant le domaine de définition fixé dans les VT et Vt).

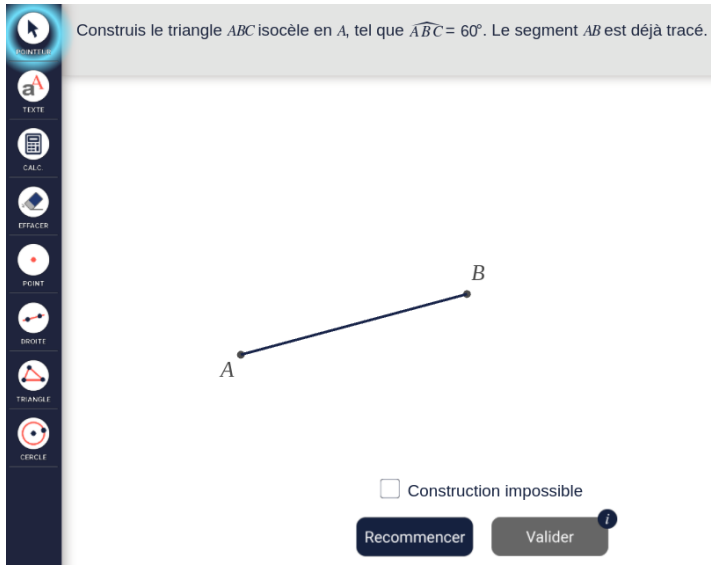


Figure 2. – « Construis le triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
Le segment [AB] est déjà tracé. »
Capture d’écran du logiciel MindMath

L’élève doit construire la figure décrite dans l’énoncé (en haut) à l’aide des outils à disposition (sur la gauche). Lorsqu’il ou elle a terminé, il ou elle peut cliquer sur le bouton « valider » (en bas). Il est également possible de recommencer en cliquant sur le bouton éponyme.

En plus de la technique visée (ou des techniques visées), nous définissons également les indices permettant au logiciel de repérer automatiquement des erreurs qui nous semblent relever de l’un ou l’autre des modes de justification des praxéologies locales mises en œuvre dans la résolution de la tâche. Par exemple, une catégorie d’erreur correspond à une construction au jugé, caractéristique du mode de justification CO0. L’emploi d’une telle technique se repère par l’absence d’utilisation des outils de construction pour la construction du triangle ABC et par un point C placé « à peu près » au bon endroit. Cette technique peut révéler que l’élève se place explicitement dans la géométrie physique, elle peut aussi indiquer que l’élève ne sait pas aller au bout de son raisonnement, alors même qu’il ou elle sait qu’une construction au jugé n’est pas correcte géométriquement. C’est pourquoi les modes de justification des élèves déterminés à partir du diagnostic d’une seule tâche ne suffisent pas à décrire leur activité géométrique et il faut multiplier les diagnostics sur plusieurs productions.

4. Modèle didactique des parcours d'apprentissage

Comme nous l'avons vu dans la partie I.3, un parcours d'apprentissage est une suite de tâches organisées pour répondre à un objectif d'apprentissage. Dans l'EIAH MindMath, c'est l'enseignant ou enseignante qui choisit l'objectif d'apprentissage en fonction du niveau scolaire et qui lance la création d'un parcours d'apprentissage pour un ou une élève.

Pour concevoir un parcours d'apprentissage, nous partons de l'objectif d'apprentissage et identifions une (éventuellement plusieurs) tâche qui correspond au « cœur de cible » des apprentissages visés dans le parcours selon le niveau scolaire en jeu. Cette tâche figure dans tous les parcours proposés aux élèves. Ensuite, pour rester dans la ZPD de l'élève (Vygotski, 1985 [1934]), il peut être nécessaire de lui proposer des tâches en amont afin de l'amener progressivement à l'objectif visé. À l'inverse, pour d'autres élèves, il sera plus intéressant de leur proposer directement la tâche cœur de cible puis des tâches plus complexes. Pour construire les différentes tâches d'un parcours d'apprentissage, comme Chaachoua et Bessot (2019), nous jouons donc sur les variables de types de tâches et de tâches en prenant en compte les modes de justification de l'élève selon les différentes praxéologies locales. Le diagnostic des modes de justification s'affinant au fur et à mesure du temps, les parcours d'apprentissage proposés aux élèves évoluent également.

Conclusion

Réponses aux questions de recherche

Dans la partie I, nous avons présenté quatre questions de recherche auxquelles nous avons répondu tout au long de l'article. Nous récapitulons ici le cheminement parcouru.

QR1 portait sur l'identification des ruptures épistémologiques, cognitives, didactiques et institutionnelles entre les géométries physique et théorique. Pour répondre à cette question, nous avons explicité des aspects épistémologiques en jeu concernant les figures et les raisonnements géométriques à la transition cycle 3/cycle 4 (partie II). Nous avons construit un MPR et en particulier la praxéologie locale relative à la construction de figures planes (partie IV.1). Nous avons ainsi pu analyser les programmes scolaires à la transition cycle 3/cycle 4 pour repérer des discontinuités dans le savoir à enseigner de ces institutions pouvant expliquer les difficultés des élèves en géométrie plane au collège (partie IV.3).

QR2 posait la question de la caractérisation des besoins d'apprentissage d'un ou une élève en géométrie. Nous avons répondu à cette question en définissant des modes de justification *a priori* situés dans une institution donnée et appuyés sur notre analyse épistémologique, cognitive et didactique (partie IV.2).

QR3 demandait comment construire des parcours d'apprentissage en pensant une progressivité dans la complexité des tâches proposées aux élèves. Nous avons répondu à cette question en faisant le choix de nous centrer sur les tâches de construction dans la continuité des travaux de la géométrie des tracés (partie II). De plus, nous avons étudié les apports de la géométrie dynamique dans un tel choix (partie III). Ces tâches de construction ne permettent pas à elles seules de passer d'une géométrie physique à une géométrie théorique mais consiste une entrée qui reste à poursuivre, notamment en s'intéressant à la preuve intellectuelle de la constructibilité des figures en jeu.

QR4 concernait la modélisation didactique et informatique des savoirs, besoins d'apprentissage des élèves, tâches et rétroactions (ce dernier aspect ayant été mis de côté [Jolivet *et al.*, 2022]). Nous avons répondu à cette question dans la partie V en explicitant les différents modèles construits notamment à partir du MPR et des modes de justification. Les premières expérimentations menées que nous n'avons pas évoquées ici (Lesnes-Cuisiniez, 2021) montrent une opérationnalité des modèles conçus pour construire des tâches à la complexité variée et pour diagnostiquer le mode de justification dominant d'un ou une élève selon une praxéologie (locale ou régionale) donnée.

Perspectives

Si ces expérimentations préliminaires sont encourageantes, elles ne permettent pas encore de répondre à une question fondamentale : quels sont les éventuels effets de l'utilisation de l'EIAH MindMath sur les apprentissages mathématiques des élèves ? En effet, la production de l'EIAH lui-même dépend d'une entreprise privée. Or, le développement actuel du logiciel ne permet pas encore de mener de véritables expérimentations dans les classes et donc de tester en conditions réelles les modèles didactiques présentés dans cet article. Il nous semble cependant que la conception du MPR ainsi que des modèles présentés ici pourraient être appliquée à l'élaboration d'un autre EIAH afin d'être mise à l'épreuve des classes.

Au-delà des aspects informatiques, il serait intéressant de développer d'autres types de tâches afin de poursuivre le travail entamé à la transition entre les géométries à partir des tâches de construction. L'EIAH MindMath n'a pas pour but de produire un programme d'enseignement mais nous aurions tout intérêt à nous pencher sur la question pour accompagner la résolution des tâches de construction que nous avons conçues et travailler véritablement l'entrée dans la géométrie théorique. Cette perspective nécessiterait également de penser l'articulation entre l'environnement de géométrie dynamique et l'environnement papier-crayon.

Bibliographie

- ARTIGUE, M. (1991). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit x*, 26, 5-27.
- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- BALACHEFF, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnnot et N. Balacheff (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 364-370). La Pensée Sauvage.
- BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [thèse de doctorat, Université Bordeaux 1].
- BOSCH, M. (2019). Les modèles praxéologiques de référence : réflexions méthodologiques en TAD. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de 2019* (p. 87-98).
- BOSCH, M., FONSECA, C., & GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2.3), 205-250.
- BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la XIII^e École d'Été de Didactique des Mathématiques, 2003* (p. 107-122).
- BROUSSEAU, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Dans *Actes du 2^e colloque de didactique des mathématiques* (p. 67-83). Université de Crète.
- CABASSUT, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII].
- CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.
- CASTELA, C. (2019). Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF 2018* (p. 667-676). IREM de Paris.
- CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de 2018* (p. 8-25). IREM de Paris.

CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 234-247. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>

CHENG, Y.-H., LIN, F.-L. (2009). Developing learning strategies for enhancing below average student's ability in constructing multi-steps geometry proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna and M. de Villiers (dir.), *Proof and proving in mathematics education: ICMI study 19 conference proceedings* (p. 124-129).

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

CHEVALLARD, Y., & JOSHUA, M.-A. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

COUTAT, S., LABORDE, C., & RICHARD, P. R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 195-221. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9684-9>

DE VILLIERS, M. (2007). Proof in dynamic geometry: more than verification. In D. K. Pugalee, A. Rogerson and A. Schinck (dir.), *Proceedings of the ninth international conference of mathematics education in a global community* (p. 155-159).

DUVAL, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, 31, 37-61.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

GODIN, M., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2008). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. Dans *Actes du XXXVe colloque de la COPIRELEM. Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ?*

GOUSSEAU-COUTAT, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire – collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété* [thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier – Grenoble II].

- GRUGEON, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 167-210.
- GRUGEON-ALLYS, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. *Évaluer, Journal International de Recherche en Éducation et Formation*, 2(2), 63-88.
- GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., & PILET, J. (2024). Apports de modèles didactiques pour concevoir des parcours adaptatifs dans un environnement numérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(3), 283-323.
- GRUGEON-ALLYS, B., PILET, J., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., & DELOZANNE, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p. 137-162). La Pensée Sauvage.
- HOUEMENT, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69-84.
- HOUEMENT, C. (2019). Le spatial et le géométrique, le Yin et le Yang de l'enseignement de la géométrie. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages* (p. 19-45). La Pensée Sauvage.
- HOUEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2003). Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *Petit x*, 61, 61-74.
- HOUEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 26, 117-156.
- JOLIVET, S., YESSAD, A., MURATET, M., LESNES, E., GRUGEON-ALLYS, B. & LUENGO, V. (2022). Rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage : modèle de description et décision. *STICEF (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation)*, 29(2). <https://doi.org/10.23709/sticef.29.2.4>
- LABORDE, C. (1999). L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (vol 1, p. 235-244). La Pensée Sauvage.

LABORDE, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In S.-C. Chu, H.-C. Lew and W.-C. Yang (dir.), *Proceedings of the 10th asian technology conference in mathematics* (p. 22-36).

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.

LAGRANGE, J.-B., & C.-DEDEOĞLU, N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2), 189-225.

LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [thèse de doctorat, Université de Paris].

MATHÉ, A.-C., BARRIER, T., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Académia – L'Harmattan.

MITHALAL, J. (2011). Vers la mobilisation d'une géométrie axiomatique et de la déconstruction dimensionnelle : intérêt de la géométrie dynamique tridimensionnelle. Dans M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de 2011* (p. 113-126). IREM de Paris 7.

OSTA, I., LABORDE, C., HOYLES, C., JONES, K., GRAF, K.-D., & HODGSON, B. R. (1998). Computer technology and the teaching of geometry. In C. Mammana et V. Villani (dir.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study* (p. 109-158).

PARZYSZ, B. (1988). « knowing » vs « seeing ». Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92. <https://doi.org/10.1007/BF00428386>

PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. Dans *Concertum de la CORFEM*.

ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 33-41). Octarès.

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2.3), 239-285.

ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 14-20). Octarès.

TANGUAY, D., & GEERAERTS, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

VYGOTSKI, L. S. (1985 [1934]). *Pensée et langage* (traduit par F. Sève). Paris : Messidor Éditions Sociales.

WOZNAK, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Éducation et didactique*, 6(2), 65-88.

Ressources institutionnelles

Depp. (2020). *Cedre 2008-2014-2019 mathématiques en fin de collège : des résultats en baisse* (note d'information n° 20.34).

Magnard. (2016). *Deltamaths 5^e*. Écrit par Xavier Andrieu, Julie Bonnet, Laure Brotreud, Thomas Iyer et Jean-Claude Perrinaud.

Ministère de l'Éducation nationale. (2018). *Espace et géométrie au cycle 3* (ressource d'accompagnement du programme de mathématiques de cycle 3).

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports. (2020a). *Programme du cycle 3* (bulletin officiel de l'Éducation nationale n° 31).

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports. (2020b). *Programme du cycle 4* (bulletin officiel de l'Éducation nationale n° 31).

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016). *Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer* (ressource d'accompagnement du programme de mathématiques de cycle 4).

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2019a). 6^e, *mathématiques : attendus de fin d'année* (bulletin officiel de l'Éducation nationale n° 22, annexe 12).

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2019b). *Cycle 3, mathématiques : repères annuels de progression* (bulletin officiel de l'Éducation nationale n° 22, annexe 23).

Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse. (2019c). *Cycle 4, mathématiques : repères annuels de progression* (bulletin officiel de l'Éducation nationale n° 22, annexe 26).