Para revitalizar la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación en la escuela primaria

Dilma Fregona
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,
Universidad Nacional de Córdoba, República Argentina

Pilar Orús Báguena
Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones de Castelló,
Universitat Jaume I de Castellón de la Plana, España

Analía Petich
Facultad de Economía y Administración,
Universidad Nacional del Comahue, República Argentina

Marta Porras
Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad Nacional del Comahue, República Argentina

A partir de fuentes documentales disponibles en el fondo Guy Brousseau, estudiamos una trama de decisiones para la enseñanza diseñada y experimentada durante varios años en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas en una escuela primaria de Francia. El análisis y la interpretación de las producciones halladas nos permite hacer visibles nuevos conocimientos que enriquecen la actividad del investigador en didáctica de la matemática, así como la del formador de docentes. Inicialmente la búsqueda fue en torno a la división, luego en el transcurso de esa trayectoria abordamos el proceso de invención de una técnica para construir un algoritmo de multiplicación.

Palabras-claves: revitalizar la investigación, diferentes designaciones de números, técnica de cálculo de multiplicaciones

Resources for revitalising research on teaching and learning multiplication in primary schools

This study draws on documentary sources from the Guy Brousseau collection to examine a set of teaching decisions that were designed and tested over several years within the framework of the Theory of Didactical Situations in a French primary school. The analysis and the interpretation of the productions allows us to identify new knowledge that enriches the activity of the researcher in didactics of mathematics as well as that of the teacher educator. Initially, the research focused on division, and in the course of this investigation, we approached the process of inventing a technique for constructing a multiplication algorithm

Keywords: revitalizing research, different numbers designations, multiplication calculation technique

Fregona, D. *et al.* (2024). Recursos para revitalizar la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación en la escuela primaria. *Recherches en didactique des mathématiques*. 44(1), 45-74. https://doi.org/10.46298/rdm.13752,

Ressources pour revitaliser la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication à l'école élémentaire

À partir des ressources documentaires disponibles dans le fond Guy Brousseau, nous étudions un ensemble de décisions pédagogiques conçues et testées pendant plusieurs années dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques dans une école primaire française. L'analyse et l'interprétation des productions relevées nous permettent de rendre visibles de nouveaux savoirs qui enrichissent l'activité du chercheur en didactique des mathématiques ainsi que celle du formateur d'enseignants. Initialement, la recherche était centrée sur la division, et au cours de cette trajectoire, nous avons abordé le processus d'invention d'une technique de construction d'un algorithme de multiplication.

Mots-clés : redynamisation de la recherche, différentes désignations des nombres, technique de calcul de la multiplication

Agradecemos la atenta lectura y las sugerencias realizadas por Marie-Hélène Salin.

Introducción

En esta contribución mostramos cómo los recursos producidos por el Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM), permiten revitalizar y hacer visibles nuevas fuentes en la investigación en didáctica. Ese Centro fue un dispositivo creado por el Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de l'Université de Bordeaux en 1972, para elaborar y experimentar ingenierías didácticas de investigación en una escuela. En este espacio, una pluralidad de actores – docentes, alumnos de nivel primario e infantil, estudiantes de posgrado, formadores y otros investigadores – compartieron una ambición común: comprender los fenómenos ligados a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática en la escuela. Sin duda, ellos mismos han acompañado, nutrido y enriquecido los desarrollos teóricos de la Teoría de las Situaciones Didácticas durante los más de veinticinco años de su funcionamiento[1].

Más allá de los recursos producidos por el COREM, archivados actualmente en el fondo documental Guy Brousseau, retomamos brevemente la primera trayectoria de indagación relativa a la difusión de una ingeniería sobre la división en la formación de docentes. Esta búsqueda nos permitió volver a cuestionarnos, y abordar, en una segunda trayectoria, un conjunto de situaciones ligadas a la multiplicación (Fregona et al., 2023). Ambos trayectos nos condujeron a estudiar la posible coherencia entre las decisiones didácticas tomadas en función de los objetivos planteados por estos recorridos para la enseñanza y el aprendizaje.

Así, enmarcamos la investigación en un proyecto más amplio que abarcó la sistematización y difusión de las producciones del COREM y cuya interpretación da cuenta de un desarrollo provocativo de la aritmética escolar. Este proyecto está dirigido fundamentalmente

1. Para mayor información dirigirse a: https://guy-brousseau.com/le-corem/presentation/ y Brousseau et al. (2015).

a la formación de docentes que enseñan matemática y también a jóvenes investigadores en didáctica de la matemática.

El COREM y el grupo escolar Jules Michelet

Desde fines de la década de 1960 un equipo del IREM trabajó conjuntamente con profesores universitarios, formadores de maestros, maestros en ejercicio y un inspector departamental sobre la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. Según fuentes documentales del COREM, a partir de esas interacciones, empezó a madurar la idea de que la investigación en Didáctica de la Matemática no podía efectuarse ni en las escuelas comunes ni en anexos con ciertas tradiciones de formación donde la investigación no estuviera incorporada como tarea en la carga horaria. Acordaron entonces presentar un proyecto para crear una escuela en la que, teniendo una trayectoria común, los docentes estuvieran dispuestos a participar en investigaciones con un horario que les permitiese realizar esa tarea. Propusieron la construcción de una escuela en Talence – zona periférica de Bordeaux, Francia – que tuviese el estatus de "escuela para la observación".

Se creó así la Escuela Michelet, establecimiento educativo de gestión pública, regido por la normativa vigente a nivel nacional, con cinco cursos además de los correspondientes al nivel inicial[2]. La interacción entre las reflexiones teóricas y las experiencias en el aula bajo condiciones controladas, fue fundamental para el desarrollo de la didáctica de la matemática como disciplina científica.

La interacción entre esas instituciones tenía un entramado complejo. En este texto distinguiremos, con el fin de facilitar la comunicación, dos dimensiones de análisis fuertemente imbricadas: una institucional que da cuenta de ciertas condiciones que hicieron posible el desarrollo de investigaciones en el aula de una escuela pública y una didáctica que, desde en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, explora las perspectivas epistemológicas y los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la división y la multiplicación desde diferentes designaciones de los números hasta una técnica escrita de cálculo de multiplicaciones. Entre ambas dimensiones, un aspecto constitutivo de esta fortaleza interactiva, es el seguimiento a los alumnos en sus procesos de aprendizaje.

2. En Francia la escuela primaria abarca de 6 a 11 años. Incluye: CP (curso preparatorio); CE1 (curso elemental nivel 1); CE2 (curso elemental nivel 2); CM1 (curso medio nivel 1); CM2 (curso medio nivel 2). La escuela maternal comienza a los 3 años, y en la mayoría de los casos está organizada en pequeña, mediana y gran sección, en función de la edad de los niños.

Dimensión institucional

Oficialmente, la Escuela Michelet fue creada dos años más tarde que el COREM (Arrêté du 18 mai 1974). La definición que sus fundadores le dieron fue "escuela para la observación", tal como fuera concebida por el IREM en su solicitud a la Administración. En ese mismo año, se construyó en el predio de la escuela el *Centre pour l'Observation*: un edificio con condiciones particulares, entre ellas la disponibilidad de recursos tecnológicos para grabar clases, que permitieron recoger datos cuantitativos y cualitativos asociados a la enseñanza de la matemática.

El funcionamiento del COREM era original, ya que combinaba diferentes tareas y responsabilidades íntimamente relacionadas, realizadas por las mismas personas en distintas posiciones. Los docentes destinaban dos tercios de su carga horaria al dictado de clases y había tres docentes cada dos clases. Sus actividades estaban distribuidas en: a) enseñanza (preparación y dictado de lecciones); b) coordinación del trabajo con los compañeros del nivel (incluía el seguimiento de los procesos de aprendizaje de cada alumno y de cada clase); c) observación de clases de su nivel u otro y participación en el análisis inmediato posterior; y d) asistencia a un seminario semanal de dos horas sobre aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

La observación de las clases constituyó un pilar importante en los desarrollos teóricos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, basada en una epistemología experimental. Se dispuso previamente que los observadores, sobre todo en las clases vinculadas con los proyectos de investigación, accedieran a la planificación de la lección para identificar y comprender los episodios didácticos relativos al tema que iba a ser desarrollado.

Finalizada la clase, el docente acompañaba a los alumnos al aula y luego participaba del análisis de la lección en interacción con los observadores. Este docente tomaba la palabra identificando momentos de la clase que fueron difíciles de gestionar, emociones, intervenciones de alumnos recuperadas oportunamente o no, presencia o ausencia de fases de institucionalización (por ejemplo: modos de presentación de cálculos y/o resultados, técnicas económicas aprendidas por la clase), administración del tiempo, etc.

El colectivo de actores del COREM produjo múltiples documentos escritos, con variantes a lo largo de veinticinco años, tales como informes anuales (*bilans*, en el lenguaje de la escuela)[3] y publicaciones grises relativas a la enseñanza de los números, la división, la multiplicación, los números racionales, entre otras. Esas producciones, referidas a las decisiones tomadas en un aula, no son las mismas de un docente que trabaja en soledad y que son específicas de una disciplina, sino que son el resultado de la implicación de diversos sectores sociales que colaborando con el proyecto del COREM exceden el marco de

3. Desde el Inventario del CRDM- GUY BROUSSEAU, del Repositori de la UJI, se puede acceder a dichos *bilans* digitalizados http://hdl.handle.net/10234/93531

la propia escuela: los representantes de las familias de los alumnos, los PEN (Profesores de Escuela Normal) de apoyo a cada nivel escolar que garantizaban el cumplimiento curricular, inspectores educativos, el IREM y la Universidad, el ayuntamiento de Talence y el gobierno de la región de Aquitaine. Todo este entramado permitió la realización de una metaproducción disciplinar que trascendió el ámbito de la Escuela Michelet.

El estudio de objetos matemáticos concebido como un desafío con fuerte dimensión epistemológica pone de relieve diferentes aspectos que priorizan el estudio de los números. El lugar del error en el aprendizaje y en la gestión de las clases impacta en las condiciones pedagógicas, escolares y sociales. Hay una amplia tradición de trabajo en la Teoría de las Situaciones Didácticas sobre las respuestas erróneas (Salin, 1976) que, en procesos de aprendizaje de un objeto matemático nuevo – en el sentido de una adaptación – son tomadas como respuestas pertinentes, como parte de las condiciones en las que el alumno se relaciona con ese objeto. Generalmente, el sujeto recibe indicios que le permiten distinguir que hubo un error en su decisión, pero no puede anticipar qué otro modo de actuación hubiese sido el más adecuado. El maestro no lo responsabiliza por la falta, lo alienta a compartir sus resultados y a avanzar en los conocimientos de la clase. Esas interacciones entre pares y con el docente tensionan particularmente a los diferentes actores de la comunidad educativa y de la sociedad.

Dimensión didáctica

En esta dimensión exploramos los aspectos de los conocimientos matemáticos trabajados en las etapas previas al proceso de enseñanza y aprendizaje de la división y la multiplicación, que permiten comprender mejor las decisiones didácticas adoptadas por los profesores e investigadores del COREM. Los datos provienen de las publicaciones grises del IREM de Bordeaux y del Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau (CRDM-GB)[4].

De los aspectos explorados, tomamos dos vinculados al proceso de designación de colecciones y a la adición, y otro relativo al seguimiento individual y colectivo de los alumnos.

4. Cabe aclarar que los recursos producidos en soporte papel por el COREM, fueron cedidos en el 2010 a la Universidad Jaume I de España (UJI). http://www.imac.uji.es/CRDM/index.php También pueden encontrarse en el Repositorio de la Biblioteca: Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau (CRDM-GB) (uji.es). Otro sistema de recursos es el banco de datos fílmicos Vidéos de Situations d'enseignement et d'Apprentissage (VISA). Véase http://visa.ens-lyon.fr

El proceso de designación de colecciones

Brousseau, después de cinco décadas de haber publicado su primer libro en 1964 destinado a alumnos de 6 años para los primeros cuatro meses de clases en el contexto de la enseñanza de las "matemáticas modernas", expresa:

> esta obra es un manifiesto a favor de un enfoque moderno de la enseñanza de las matemáticas. Más aún, es una verdadera provocación por el número de disposiciones tradicionales que transgrede (2015, p. 1).

A fines de 1960, Brousseau (1972) y en las décadas posteriores, una de esas transgresiones de las prácticas de enseñanza en la Escuela Michelet estuvo relacionada con la construcción de procesos de designación de colecciones que permitieron la construcción de los números y de sus relaciones[5]. Al inicio de CP, los alumnos de 6 y 7 años, después de comparar colecciones utilizando la correspondencia término a término, se encontraban con el número como una propiedad de colecciones equipotentes de objetos diferentes. Además de la manipulación de pequeños objetos, se trabajó el nombre del número y la escritura. En la cita que sigue, se menciona 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 17. Se propuso entonces dar el cardinal de una colección numerosa, la cual generó inicialmente desconcierto en los alumnos y les permitió experimentar nuevas "necesidades" en términos de conocimientos matemáticos a construir. El cardinal de la colección actuó como una *variable didáctica* de la situación ya que el valor que tomó esa variable modificó el conocimiento necesario para resolverla. Una de las técnicas a la que recurrieron, y que se institucionalizó localmente, fue la partición de la colección y la designación numérica de cada parte por un símbolo convencional. Por ejemplo: 5, 4, 8, 10, 4, 5 designa 36. Una publicación del IREM de Bordeaux de 1977 describe, entre otras actividades:

> El uso del signo + no sólo está vinculado al cálculo efectivo de sumas, sino también a la designación de números, a las manipulaciones de colecciones.
>
> Entonces, los alumnos saben designar algunos números según la escritura usual, por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 17; estos números corresponden a ciertas clases de conjuntos de objetos.
>
> Los signos de los números conocidos y la introducción del signo + permitirán designar números: «8+6»; «8+6+5»; «14+2+8+8», ya conocidos o no, y entonces contar y comparar colecciones que contengan un gran número de objetos (de 50 a 100).

La escritura aditiva de los números da al alumno la posibilidad de ir más allá de la manipulación de colecciones para concebir números cada vez más grandes: los números conocidos y la suma pueden utilizarse para construir cualquier nuevo número. (Deramecourt et al., 1977, pp. 83-84) El signo + se presenta como una convención que reemplaza a "y" o a la coma, entonces *6+5+6+4* no es, en un primer tiempo, una operación a realizar,

5. Véase: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Annexe-Processus-de-Math.pdf

sino la *escritura aditiva* de un número previa a la escritura usual. Nuevamente se articulan las colecciones, el nombre de los números y sus diferentes escrituras, con ciertas limitaciones en el orden de magnitud[6].

La adición en articulación con el sistema de numeración decimal

Con la intención de dar pistas sobre los conocimientos previos en el estudio de la multiplicación y de la división, nos detendremos en la adición. El estudio de la adición incluye las equivalencias entre escrituras aditivas y escrituras usuales de un número y la comparación de números escritos bajo diferentes formas. El trabajo con las relaciones de igualdad y desigualdad a través de la comparación de números y escrituras aditivas refuerza el tratamiento de la designación de números. Poco a poco se privilegian las escrituras aditivas correspondientes al sistema de numeración decimal (como las del tipo *10+10+…+10*), técnica que redundará en beneficio de los cálculos de las operaciones, particularmente, en las descomposiciones de factores en la multiplicación. Además, podemos visibilizar un trabajo sostenido de memorización de un repertorio aditivo con sumas que dan 10, vinculado al cálculo mental. Se introduce el 100 como 10 decenas y se escriben y comparan números de dos cifras. En CE2 se continúa estudiando el sistema de numeración decimal a través de tareas del tipo: *"Encuentra un número sabiendo que: la cifra de las centenas es 3, la cifra de las unidades es 7 y el número de decenas es 36"*.

A medida que se avanza en la designación de números mediante escrituras aditivas, se introduce la operación adición. El repertorio memorizado de cálculos, el trabajo sobre cálculos horizontales, el uso de la calculadora y la reducción de escrituras aditivas (*6+5+3+4+1* deviene en *11+3+5*, luego *11+8* y, finalmente 19), son instrumentos adecuados para el estudio de la técnica de cálculo usual de la adición en columna. Se organiza una progresión de aprendizajes a través de un ir y venir de actividades de escritura y comparación de números. Destacamos fases de institucionalización de repertorios aditivos entre dígitos (particularmente los que dan 10) de modo que se establece una regla en la clase que solo habilita estas técnicas de cálculo. Por eso cobra relevancia el seguimiento individual de los alumnos, pues en un momento dado no se admiten diversas técnicas o recursos de cálculo, sino lo que ya fue acordado en clase.

El seguimiento de aspectos del aprendizaje de los alumnos

Ya hablamos brevemente del lugar del error en el proceso de aprendizaje porque es esencial que, desde la enseñanza, la decisión desafortunada sea identificada en un momento preciso y esté relacionada con un conocimiento o saber determinado. Además de las eva-

6. Si bien al superar la manipulación de colecciones, es posible acceder a números grandes, estos lo son en un rango relativo.

luaciones exigidas por el sistema educativo de la época (trimestrales, CAS y TAS[7], etc.), en la Escuela Michelet se realizaban frecuentemente “controles” cuya función consistía en determinar cuáles eran los desempeños de cada alumno en un análisis llamativo por el nivel de minuciosidad con el que se identificaban los “errores”. Como veremos en el apartado destinado a la multiplicación, la clase y cada uno de sus actores tuvieron a su disposición los conocimientos que exigían el abordaje de los desafíos propuestos. De allí la importancia de un seguimiento en detalle de los desempeños individuales.

La imagen de la figura 1 muestra una respuesta esperada al cálculo *27×45* en términos de criterios para la corrección. A la izquierda, aparecen subtareas[8] y en el esquema, el corte de la cuadrícula en cuatro sectores (doble distributivita, *(20+7)×(40+5)*) y la suma de los números obtenidos en cada sector[9].

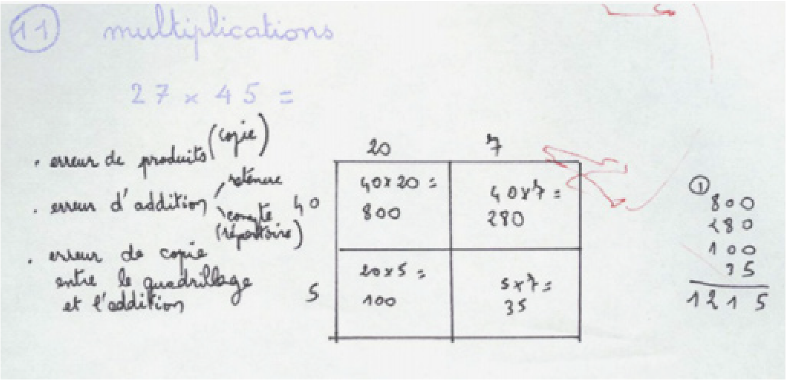


Figura 1. – Registro de corrección del docente CE2 82/83, caja 158, CRDM-GB, UJI

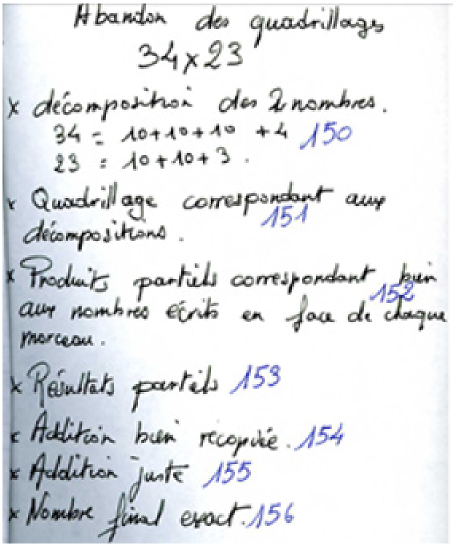
Según el informe anual de ese año, esta actividad se dio en el primer trimestre. En los comentarios, los autores expresan que buscaban recuperar la técnica utilizada a fines de CE1. El corte planteado, siendo el más económico, no permite esperar descomposiciones de a 10.

7. Contrôle de l’Année Scolaire, CAS, se tomaba en la Escuela Michelet a los alumnos de CM2 en junio, en matemática y francés. Asimismo, en esas dos disciplinas, y a finales de la escuela primaria, todos los alumnos del país pasaban por el Test d'Acquisitions Scolaires, TAS.

8. A la izquierda se lee: erreur de produits (copie); erreur d’addition, retenue, compte (répertoire); erreur de copie entre le quadrillage et l’addition.

9. Actividad que corresponde a la tercera etapa de construcción del algoritmo, desarrollada en esta contribución en el apartado Hacia un algoritmo de la multiplicación.

Otra muestra del control sobre la producción individual, y sobre el cálculo de productos al abandonar las cuadrículas, puede verse en la figura 2. Allí se observan los criterios de corrección codificados (nos referimos a los números 150, 151… hasta 156)[10].



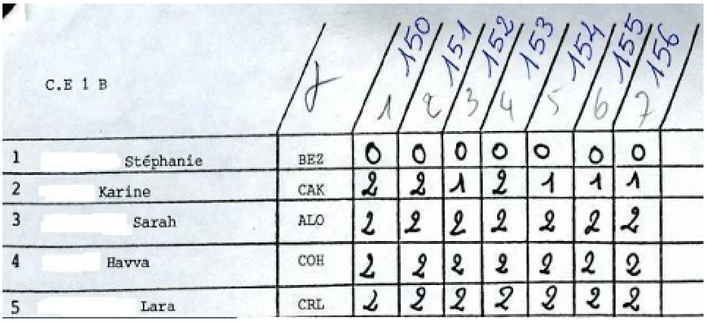
Abandon des quadrillages
34x23
x décomposition des 2 nombres.
34 = 10+10+10 +4 150
23 = 10+10+3.
x Quadrillage correspondant aux 151
décompositions.
x Produits partiels correspondant bien 152
aux nombres écrits en face de chaque
morceau.
x Résultats partiels 153
x Addition bien recopiée. 154
x Addition juste 155
x Nombre final exact. 156

Figura 2. – Registro de corrección del docente, CE1 81/82, 22-03-82, caja 132, CRDM-GB, UJI

En relación con este registro, la figura 3 presenta una tabla de doble entrada denominada "*pavé*" en el lenguaje de la escuela, en cuyas columnas aparecen los códigos de error y en las filas, los nombres de los alumnos – seleccionamos las cinco primeras líneas – que están en clave[11]. Las cifras indican: 0, sin respuesta; 1, error; 2, éxito. Así, interpretamos que la primera alumna, BEZ tal vez estuvo ausente en ese control; la segunda alumna CAK tuvo éxito al descomponer los factores, trazó la cuadrícula correspondiente y obtuvo correctamente los resultados parciales.

10. El registro de corrección muestra : Abandono de las cuadrículas, descomposición de los 2 números, cuadrículas que corresponden a las descomposiciones, productos parciales que corresponden a los números escritos frente a cada sección, resultados parciales, suma recopiada correctamente, suma correcta, número final exacto.

11. Durante los 25 años de existencia del COREM, cada alumno era señalado con una terna de letras que permitía identificarlo sin revelar su identidad.



C.E 1 B		150 / 1	151 / 2	152 / 3	153 / 4	154 / 5	155 / 6	156 / 7
1 Stéphanie	BEZ	0	0	0	0	0	0	0
2 Karine	CAK	2	2	1	2	1	1	1
3 Sarah	ALO	2	2	2	2	2	2	2
4 Havva	COH	2	2	2	2	2	2	2
5 Lara	CRL	2	2	2	2	2	2	2

Figura 3. – Registro codificado de corrección de cada alumno, CE1 81/82, 22-03-82, caja 132, CRDM-GB, UJI

Identificada la dificultad con los alumnos que se enfrentaban a ella, se organizaron sesiones grupales de apoyo en la escuela, en horario escolar. Encontramos referencias a estas clases en CE1 en el informe anual correspondiente al 82/83, donde se afirma que, durante 30 minutos por semana, primero con tres alumnos y luego con cuatro, se les ayudó a dominar – entre otros temas – el corte de colecciones de cuadrados en el trabajo con la multiplicación.

La lectura de esos informes anuales, también nos indica, eventualmente, la bibliografía consultada. En reiteradas ocasiones mencionan los textos de la colección ERMEL[12], en particular los números aparecidos en los últimos años de la década del 70.

La división

Desde la década del 90, investigadores de distintas universidades argentinas tomamos como objeto de discusión la enseñanza de la división. Una de las fuentes utilizadas fue una publicación de Brousseau y sus colegas de 1985 sobre este tema. Esta elección estuvo inicialmente vinculada a una problemática sobre la enseñanza del algoritmo de la división que se encontraba de manera recurrente en la formación inicial y continua de docentes en Argentina.

12. ERMEL es la sigla del Équipe de Recherche en Mathématiques à l'École Élémentaire, institución que en el marco del Institut National de Recherche Pédagogique (INRP), reunió a investigadores franceses que participaron en indagaciones sobre la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. A partir de 1977, surgió una colección de libros destinados a la formación inicial y continua de docentes que enseñaban matemática. En la actualidad incluye otros soportes y materiales. Véase: https://www.editions-hatier.fr/recherche-enseignants/collection/ermel-1783

La identificación de un problema (para la profesión): el algoritmo de la división

Teníamos la hipótesis de que la enseñanza de este algoritmo podría constituir un problema para la profesión en la institución de formación de docentes de primaria. Constatamos expectativas potencialmente fluctuantes en el seno de esa institución en cuanto a la enseñanza del algoritmo de la división. Por un lado, los programas y tradiciones escolares tienden a darle un lugar importante al propio algoritmo y a su enseñanza. Por otro lado, las propuestas innovadoras basadas en resultados de diferentes investigaciones, a veces tienden a disminuir su importancia y a desarrollar, en el espacio de esta enseñanza, oportunidades para consolidar conocimientos sobre la numeración, el sentido de los números y de las operaciones. La distancia entre esas posiciones, provoca oscilaciones que han conducido a los futuros docentes de primaria a expresar de manera recurrente fuertes necesidades de formación en términos de identificación de los conocimientos matemáticos convocados por este algoritmo.

En 2011, desde la Universidad Nacional de Córdoba, le propusimos a un grupo de docentes de la escuela primaria estudiar el documento de Brousseau de 1985 con el fin de comprender la secuencia sobre un algoritmo de la división, calificado como ergonómico (Brousseau, 2010)[13]. Esa cadena de lecciones fue elaborada en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y experimentada en el COREM. Su estudio minucioso les permitió a los docentes identificar los conocimientos y saberes matemáticos en juego en el algoritmo de la división y en su construcción. Sin embargo, los docentes en reiteradas ocasiones plantearon "*¿Cómo se vuelve al [algoritmo] convencional? Porque es eso lo que se quiere*".

La vuelta al algoritmo tradicionalmente enseñado en la escuela argentina y la búsqueda de elementos que dieran respuesta a esas cuestiones, marcó nuestra trayectoria de investigación.

Decisiones didácticas en la enseñanza y el aprendizaje de la división

La secuencia mencionada sobre la división comenzó en CE2, con la resolución de problemas donde se les propuso a los alumnos buscar el número de grupos que se podían armar con cierta cantidad de elementos, sin que ellos mismos tuvieran una técnica de cálculo específica, El primer problema planteaba llegar a 248 dulces que se presentaban en cajas de 18[14].

13. Brousseau (2010) analiza una propuesta sobre cómo enseñar tanto el cálculo de multiplicaciones como el de divisiones según técnicas que reconoce como ergonómicas.

14. En los problemas siguientes los números involucrados son: 310 en grupos de 16; 187 de a 12; 350 de a

La elección de esos números relativamente grandes, funcionaba como variable didáctica porque desalentaba ciertas técnicas basadas, por ejemplo, en representaciones gráficas y desafiaba a los alumnos a buscar otros modos de resolución[15]. Los docentes habían previsto, tal como lo muestra un extracto de la planificación de la clase, diferentes modelos de resolución: adición o sustracción reiteradas, o multiplicación con tanteos (figura 4).

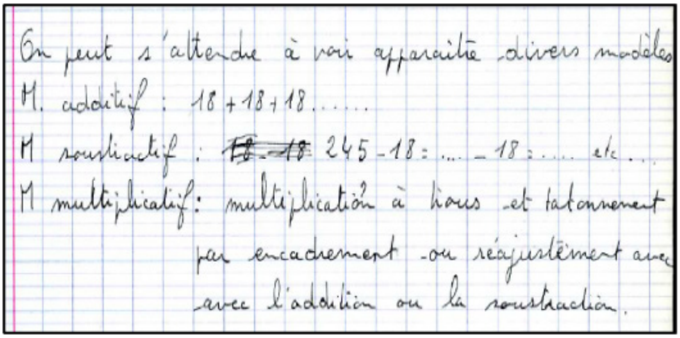

On peut s'attendre à voir apparaître divers modèles
M. additif : 18 + 18 + 18 .....
M soustractif : ~~18 - 18~~ 245 - 18 : .... - 18 : .... etc ...
M multiplicatif : multiplication à trous et tâtonnement
par encadrement ou réajustement avec
avec l'addition ou la soustraction.

Figura 4. – Extracto de una planificación CE2, 13-05-1983, caja 159, CRDM-GB, UJI

La exploración de los archivos del CRDM-GB nos permitió plantearnos nuevas cuestiones: ¿Qué estrategias de base (potencialmente relacionadas con los modelos descritos en la ficha) podían implementarse para responder al problema planteado? ¿Qué intervenciones realizan los docentes sobre esas estrategias? ¿Cuáles son los observables (trazas o producciones) de las estrategias utilizadas por los alumnos? ¿Cuál es la gestión docente en términos de formulación de conocimientos, de devolución y de institucionalización?

Varias publicaciones producidas entre 2012 y 2017 (Brousseau et al., 2012; Fregona y Orús, 2012b, 2017b; Fregona et al., 2013; Fregona et al., 2017a) basadas en los archivos del CRDM-GB aportan diferentes aproximaciones sobre ese conjunto de cuestiones. En este texto, nos detendremos en el quinto problema (figura 5) en el cual se recurre a la utilización de una cuadrícula. Brousseau et al. (1985) expresan el rol jugado por esa cuadrícula de la siguiente manera:

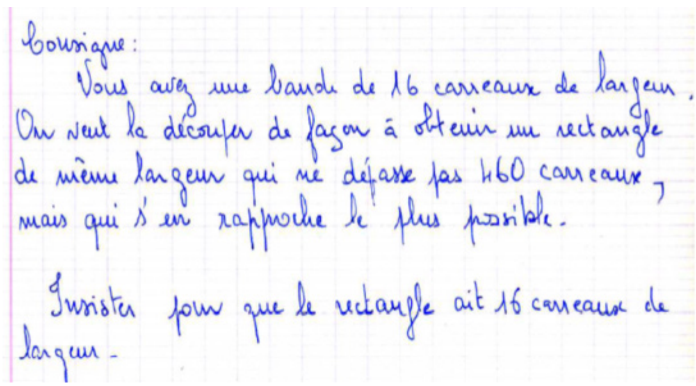
> *INTENTIONS PÉDAGOGIQUES : Les deux séances suivantes ont aussi pour objet de résoudre des situations de division qui, cependant, diffèrent des précédentes. En effet, elles s'appuient sur un matériel particulièrement familier aux enfants : le quadrillage… ce qui favorisera la mise en œuvre de procédures multiplicatives et facilitera la justification des résultats (phase de validation). (Brousseau et al. 1985, p. 11)*

15. Durante décadas, el inicio de la cuenta de dividir presentaba la disposición entre números de una cifra, y sus respectivos nombres (dividendo, divisor, cociente) primero sin resto y luego con resto, un dividendo de dos cifras por un número de una cifra, etc.

La decisión de incluir una cuadrícula fue una variable didáctica fundamental ya que buscaba recuperar la memoria didáctica de la clase. La cuadrícula permitía *a priori* activar un repertorio de conocimientos construidos anteriormente por los alumnos sobre técnicas de cálculo que involucraban el estudio del sistema de numeración y la prioridad que se le daba allí al trabajo con "paquetes de 10" y la adición (véase apartados anteriores). La multiplicación se presentaba como un conocimiento adecuado para resolver el problema y desalentaba las adiciones o sustracciones repetidas.

La consigna del problema era (figura 5):

> Consigna:
>
> Tienen una banda de 16 cuadrados de ancho. Se la quiere cortar para obtener un rectángulo del mismo ancho pero que no supere los 460 cuadrados, pero que se acerque lo más posible.
>
> Insistir para que el rectángulo tenga 16 cuadrado de ancho.



Consigne :
Vous avez une bande de 16 carreaux de largeur. On veut la découper de façon à obtenir un rectangle de même largeur qui ne dépasse pas 460 carreaux, mais qui s'en rapproche le plus possible.

Insister pour que le rectangle ait 16 carreaux de largeur.

Figura 5. – Extracto de una planificación CE2, 19-05-1983, caja 159, CRDM-GB, UJI

El ancho fijado (que permitía materializar el divisor, aquí 16) se conservaba de una situación a la siguiente ya que a continuación de este problema, los alumnos eran invitados a "aproximarse (a un rectángulo) de 3300 cuadraditos". La elección de dejar el ancho del rectángulo fijo y de jugar sobre la modificación del número de cuadrados a aproximar (que corresponde al dividendo) constituyó un *salto informacional* (Brousseau, 1997, p. 17): los conocimientos que permitieron resolver el problema se manifestaron poco eficaces. ¿Cómo llegar a 3300 cuadraditos avanzando de a 16? Cuando se trataba de llegar a 460, el informe indica que había procedimientos que utilizaban particiones en paquetes de 10 y no obtenían una respuesta correcta, otros grupos recurrieron a modelos aditivos con paquetes de *2×16*, y también hubo quienes lo hicieron de *10×16*. Para alcanzar 3300 cuadraditos, intentaron diferentes estrategias y una de ellas propuso paquetes de *16×200*[16].

Los recursos del CRDM, depositados en las cajas identificadas a partir del Inventario[17], nos permitió acceder a producciones sorprendentes de alumnos y docentes. Lo que conocíamos como una trayectoria en etapas en la construcción de un algoritmo (Brousseau, 2010), se develó en una fina trama de decisiones a lo largo de la escolaridad. Estos hallazgos revitalizaron la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela primaria, tal como lo enunciamos en el título de este texto.

En nuestros trabajos ya citados sobre la división, mostramos que los alumnos (de CE2) tenían una gran habilidad en la resolución de problemas. La cuestión de saber qué conocimientos habían construido sobre la multiplicación, antes de abordar el algoritmo de la división, nos motivó a "tirar del hilo": ¿cómo se llevaba a cabo el estudio de los cálculos de multiplicaciones? ¿Por qué la aparición de la cuadrícula en el quinto problema condujo a la clase hacia el modelo multiplicativo? Postergamos, entonces, algunas cuestiones pendientes en torno a la división e incursionamos en el estudio de la multiplicación realizado en el seno del COREM a principios de la década del 80.

La multiplicación

En *Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels* (2010) Brousseau aborda, una vez más, la enseñanza de las multiplicaciones y divisiones elementales y toma una posición explícita por mantener la enseñanza del cálculo tradicional escrito. Así plantea: ¿Cómo efectuar y disponer los cálculos de las multiplicaciones y sobre todo de las divisiones? ¿Y cómo enseñarlos? Con respecto a la multiplicación, rescata la técnica de cálculo llamada *per gelosia*, que difundió en un estudio sobre las ventajas de su enseñanza (1973) y que fue recuperada en diferentes ocasiones por él mismo y por otros investigadores[18]. En la Escuela Michelet, durante décadas, se estudiaron dos técnicas para el cálculo de multiplicaciones: la técnica *per gelosia* en CE2 y la clásica especialmente predominante en el uso escolar y social.

---

16. La División en la Escuela Primaria. Informe de situaciones de enseñanza de la división, realizadas con alumnos de tercero, cuarto y quinto grado de la escuela elemental J. Michelet. Traducción al español: http://hdl.handle.net/10234/143287

17. Véase: Inventario del CRDM- GUY BROUSSEAU, en el Repositori de la UJI: http://hdl.handle.net/10234/93531

18. Sierra, Bosch y Gascón (2013), describen la técnica per gelosia y proponen criterios de comparación con la técnica clásica – economía, fiabilidad y dominio de validez – como aspectos básicos del cuestionamiento tecnológico-teórico de las técnicas, especialmente las algorítmicas.

En nuestro estudio referido a la multiplicación, como lo hicimos anteriormente para la división, consultamos una antigua publicación del IREM de Bordeaux sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación (Berthelot & Grésillier, 1985)[19].

La multiplicación para designar el cardinal de una colección rectangular

De modo análogo al trabajo realizado con las escrituras aditivas de un número del cual se desconoce su nombre y escritura, se introducen *escrituras multiplicativas* para designar colecciones cuyos elementos estaban dispuestos en una configuración rectangular. En CE2, la técnica de partición de una colección para dar su cardinal es constitutiva de la *estrategia de base* para calcular el número usual[20] de, por ejemplo, *14×18*. Cuando una colección está dispuesta en una configuración rectangular, se llevan a cabo actividades donde los alumnos aprenden a usar el producto para designarlas. Por ejemplo *4×3* designa un rectángulo con 4 filas y 3 columnas, o al revés, dependiendo de cómo se disponga la colección. Así, en analogía con las escrituras aditivas, en un primer momento, el signo × no indica una operación a realizar.

Al igual que con la adición, se propuso elaborar, utilizando distintos materiales tales como fichas o cuadrículas' repertorios multiplicativos de algunos números, entre ellos 16 (*4×4; 2×8; 8×*2), 12, 36 y 17. En sucesivas sesiones, se avanzó con la técnica de búsqueda sistemática de distintas escrituras multiplicativas, incluidas las que tienen el factor 1 necesario para expresar un número primo. Mientras que la escritura *a×b* designaba el número de una colección, se trabajó durante algún tiempo con tareas que permitiesen distinguirla de la escritura *a+b*.

Un testimonio de esas decisiones es el extracto siguiente:

> Desde hace 3 años, estudiamos un proceso en el que los niños crean sus propios algoritmos. Queremos que conciban el problema de "calcular el producto" antes de estudiar la solución. De este modo, el producto ya no es "lo que se encuentra multiplicando". Por ejemplo, el niño sabe que "a×b" es el cardinal de un conjunto con a filas y b objetos. Para "calcular" a×b, primero inventa una forma de dividir el conjunto en trozos cuyos elementos pueda contar y, después, suma los números resultantes. Mejoró su división y la elección de los trozos para que su algoritmo fuera más rápido, seguro, eficiente y general. Aún no sabía que existía un único método de cálculo. (Berthelot & Grésillier, 1985, p. 7)

19. Las dos publicaciones del IREM (acerca de la multiplicación y de la división) que tomamos en el inicio del estudio son de 1985, es por ello que la exploración de los documentos del CRDM-GB está centrada en los inicios de la década del 80.

20. La expresión "calculer le nombre usuel" era la utilizada en Michelet, en esta contribución elegimos "buscar la escritura usual del número".

¿Qué significa "mejora su corte"? Esta tarea es parte esencial de la técnica de partición para determinar el número de casillas de una cuadrícula sin contarlas una por una. En una publicación destinada a docentes, Brousseau et al., (1972) describen los resultados de una lección donde una de las tareas era calcular el número usual de casillas de una cuadrícula de 5×22. Las diferentes respuestas de los grupos muestran que "la mejora" estuvo relacionada con criterios de economía de cálculo. Un alumno observó que, solamente, se cortó el 22 y otro grupo repitió el corte en 5 y 6. En la puesta en común, se dieron cuenta de que cuando se cortaba por 10 el cálculo era más fácil y rápido. Era el corte esperado y buscado en la secuencia de enseñanza porque en los modos de calcular y justificar los productos por números de dos cifras se enfatizaba la descomposición de los factores según el valor posicional de sus cifras.

En 2010, ante la propuesta de una comisión ministerial para discutir el lugar del cálculo en la escuela primaria francesa, Brousseau retomó y describió las etapas del proceso de invención y aprendizaje de la técnica para determinar el cardinal de una cuadrícula rectangular, tarea que según la consigna utilizada en CE1 era "*calculer le nombre usuel*" de esa colección. Luego, relata las etapas que estructuran la secuencia como sigue:

> Conteo de los cuadrados de un rectángulo en CE
>
> - Primera etapa: los alumnos disponen de una hoja de papel cuadriculada de 25 por 18 cuadrados. Para contar estos cuadrados en equipo, marcan trozos separados y los cuentan uno a uno antes de sumar los resultados. [...]
>
> - Segunda etapa: cortan un nuevo rectángulo más grande en cuadrados de 10 x 10, cuentan las centenas así obtenidas y luego los trozos restantes. [...]
>
> - Tercera etapa: el rectángulo del que disponen los niños ya no es cuadriculado, los alumnos deben dibujar el resultado del corte y calcular las sumas. [...]
>
> - Cuarta etapa: las centenas se reagrupan y las representaciones ya no guardan las proporciones. [...]
>
> - Quinta etapa: hasta ahora, la suma se ha calculado junto al rectángulo. Pero pronto será posible hacerla directamente sobre el dibujo del corte, tras reconocer la posición de los mismos coeficientes de potencias de 10 en las diagonales. (Brousseau, 2010, pp. 25-26)
> Un primer análisis de estas etapas permite distinguir, con apoyo en la noción de variable didáctica, cómo el maestro modifica algunas condiciones del medio para que los alumnos recurran a nuevos conocimientos matemáticos necesarios para construir la multiplicación, dentro del marco del proceso experimental.

Las producciones consultadas en los archivos del CRDM-GB muestran que, desde el principio, los alumnos convocaban técnicas que daban cuenta de recortes de la colección rectangular cuadriculada en partes expresadas como productos. La consigna a lo largo de la secuencia se mantuvo: calcular la escritura usual del número. Los alumnos no recurrían a las técnicas más básicas tales como el conteo uno a uno o sumas reiteradas. Suponemos que esto pudo deberse a la decisión del docente de considerar el tiempo necesario para dar una respuesta como variable didáctica (solamente algunos minutos) o que habría una memoria de la clase que favorecía la técnica de delimitar las regiones disjuntas expresadas como productos de dos números. Para el docente el juego no era contar o calcular el número total de cuadrados, sino que se produjeran nuevas designaciones que avanzaran hacia la designación esperada del tipo "escritura usual del número".

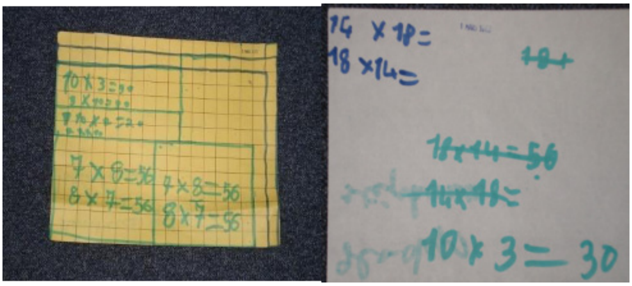


Figura 6. – Producción grupal, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

En la primera actividad del 1 de marzo de 1982, se planteó la consigna de calcular la escritura usual del número *14×18*, en base a una cuadrícula recortada según esas dimensiones. Un grupo produjo lo que muestra la figura 6.

Los alumnos contaban con la estrategia de base que era cortar la cuadrícula, el desafío era cómo hacerlo. La producción de la izquierda (Figura 6) muestra que, para responder a la consigna planteada, los alumnos consideraron recortes que no llegaron a cubrir totalmente el rectángulo. Podemos formular la hipótesis de que buscaron productos entre dígitos para los cuales ya disponían de la escritura usual y que repitieron dos cálculos parciales (*7×8*) además de los productos por 10 (*2×10* y *3×10*). En la producción de la derecha sobre papel liso, que corresponde al mismo grupo, aparecen escrituras multiplicativas donde se conmutan factores que estaban involucrados en la cuestión a resolver.

Otra respuesta a esta tarea se muestra en la figura 7 en la que observamos cortes regulares de *4×9*, salvo en *18×2*.

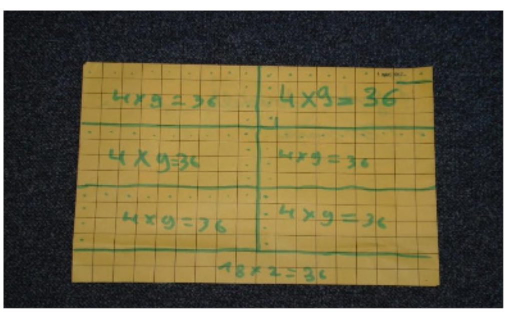


Figura 7. – Producción grupal, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

La regularidad en el corte permitió a estos alumnos producir superficies rectangulares disjuntas que recubrían todo el rectángulo correspondiente a "*14×18*". El número asignado a cada sección es 36, como *4×9* y también *18×2*. No tenemos información sobre la respuesta final de este grupo.

En la descripción de las etapas que estructuran la secuencia, Brousseau (2010) propuso utilizar *25×18*. La modificación de los factores seguramente buscaba reducir la incertidumbre que generaba una colección donde uno de los factores tenía dos decenas. Conjeturamos que, dado el seguimiento a los alumnos, los docentes no estaban seguros de que la descomposión fuera en términos de decenas y unidades para cada factor. Las producciones obtenidas, con los números dados, respondían a las expectativas de esa primera etapa.

En la búsqueda de la escritura usual del número

Con respecto al proceso de construcción y aprendizaje de una técnica para determinar el cardinal de una cuadrícula rectangular, se observaron avances progresivos en los trabajos de los alumnos, vinculados a la escritura usual del número como suma de números que correspondían a productos intermedios donde recurrían a múltiplos de 10 (figura 8).

El 4 de marzo, tres días después de la lección que inició la primera etapa de la secuencia, se planteó el cálculo de *32×17* sobre una cuadrícula. Aparecieron, según lo muestra la Figura 8, las primeras sumas parciales ordenadas horizontal y verticalmente donde casi todos los sumandos provenían de productos por 10 (32 como *10+10+10+2*, y 17 en *10*+7).

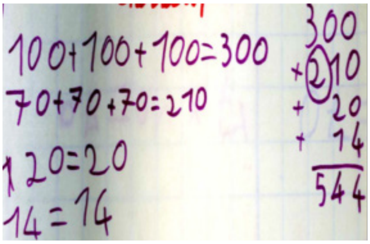


Figura 8. – Producción de alumnos, CE1 81/82, cajas 130 y 132, CRDM, UJI

Observamos que en esta técnica recurrieron implícitamente a la doble distributiva. Sobre la lección de ese día, contamos con el registro de un observador:

> Il y a progrès (*sic*) dans certaines équipes et apparemment régression (*sic*) dans d'autres. En fait, ils se servent tous de 10 × … mais d'une manière irrégulière. Les découpages ne sont pas réguliers. Une seule équipe fait des découpages réguliers de 10 et les autres ne trouvent pas le nombre usuel. (CE1 81/82, caja 132, CRDM-GB, UJI)

Según la descripción de Brousseau (2010), interpretamos que algunos grupos estaban transitando la segunda etapa porque aparecen cortes de *10×10* en los que se obtienen centenas. Así, los productos para cada sección y las sumas parciales fueron más rápidas y eficientes. Ese era el objetivo para toda la clase.

En la siguiente actividad realizada el 5 de marzo, al proponer un producto de 20 por 26 (véase figura 9), se reforzó el cálculo sobre las decenas: ambos factores tienen dos decenas y uno de ellos es precisamente 20.

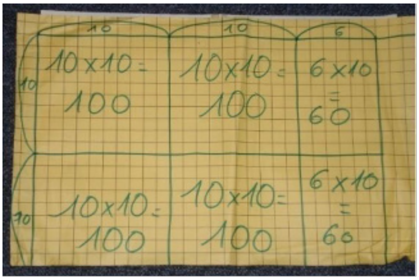


Figura 9. – Producción grupal, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

Esa elección de los factores modifica los conocimientos de los alumnos, porque parece permitir a un mayor número de grupos progresar en la técnica que se aproxima a una descomposión polinómica en términos de decenas. Además, en esta actividad, debían determinar la colección a calcular, ya que disponían de una cuadrícula más grande que los factores involucrados. Interpretamos que ese paso previo buscaba centrar la atención en los números en juego, particularmente en el 20, y enfatizarla consigna: calcular la escritura usual del número *20×26*. Esto demuestra la potencia de los números elegidos como valores de las variables didácticas para esta actividad.

Un registro de observación de esa clase expresa:

> *"Vers le découpage par 10 (1) 20×26*
>
> *3 équipes font le découpage par 10, utilisant 10×10 et 6×10. Elles trouvent toutes les trois 520. Les autres équipes utilisent 10×10=100 mais au sein d'autres découpages irréguliers (...)"*
>
> *(CE1 81/82, caja 132, CRDM-GB, UJI).*

La respuesta de la figura 9 nos revela la función tecnológica que cumple el uso de cuadrículas. La descomposición de los factores, en decenas y unidades, condujo a seis sectores sobre la cuadrícula, lo cual coadyuva al control de los productos parciales y al cálculo de la suma final[21]. Se reunían allí, aunque no se explicitan, la descomposición polinómica de los números en el sistema decimal y las propiedades de las operaciones de suma y producto,

21. Schifter (1997), citado en Constantin & Coulange (2017), da el ejemplo de un alumno que para resolver 1812, hace 1010, 82, suma y obtiene 116.

principalmente, la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, propiedad que no es mencionada. Aparece aquí como un teorema en acto, totalmente contextualizado. Por el momento, esto no puede ser considerado – tal como lo conciben Constantin y Coulange (2017) – como un saber con potencia generalizadora que favorezca el tratamiento algebraico de lo numérico.

Las actividades del mismo tipo que siguen (*12×28* propuesta el 6 de marzo y *24×13*, del 11 de marzo) permitieron el éxito de casi todos los grupos de alumnos, según el registro de un observador (el 11 de marzo) en el lapso de, aproximadamente, una semana. Según la información recogida, entre el 6 y el 11 de marzo, los alumnos abordaron problemas con enunciados que evocaban disposiciones rectangulares. Nos detendremos en la documentación recogida, referida particularmente al cálculo de la escritura usual del número. Ante *28×12* (figura 10), un grupo realizó los cortes mayoritariamente en paquetes de *10×10*. Sobre la cuadrícula de la izquierda observamos una multiplicación realizada horizontalmente y, en la imagen de la derecha, la suma de los productos parciales dispuesta verticalmente.

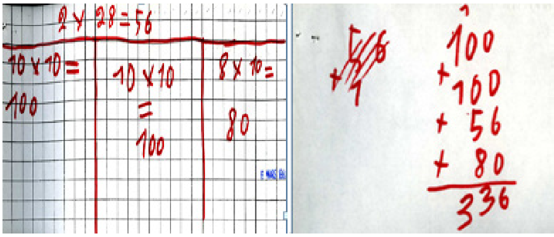


Figura 10. – Producción grupal, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

La cuadrícula quedó partida en cuatro sectores, tres de ellos con factores que involucran decenas y un cuarto sector que indica *2×28*. Hipotetizamos que los alumnos decidieron economizar sus cálculos y entonces no subdividieron ese sector. Seguramente, al mismo tiempo que hubo un intenso trabajo semanal en la construcción de la técnica para calcular la escritura usual del número, también se avanzó en los productos horizontales (como muestra *2×28*) y en los productos por múltiplos de 10.

El 11 de marzo, según muestra un registro de observación, resolvieron *24×13* y todos obtuvieron el resultado haciendo productos por 10. El registro expresa: “Découpage par 10: 24×13. Travail par 2. Tous réussissent. Une équipe s’est trompée à l'addition (mal recopiée : 13 au lieu de 12)”[22] (CE1 81/82, caja 132, CRDM-GB, UJI).

22. Traducción: Recorte por 10: 24×13. Trabajo por parejas. Todos lo han conseguido. Un equipo se equivocó en la suma (copió mal: 13 en lugar de 12).

El 12 de marzo hubo un control individual (en términos del seguimiento de los alumnos) donde, con el apoyo de una cuadrícula, debieron resolver *17×23*. Hasta ese momento el trabajo era en grupos. No tenemos registro de los resultados obtenidos. El informe de ese año lectivo no suministra información, pero es evidente que en una semana (del 11 al 18 de marzo) se dio el abandono de las cuadrículas y se realizaron los cálculos sobre rectángulos dibujados a mano alzada en papel liso. Se empezó así a transitar la tercera etapa descrita en Brousseau (2010): los alumnos debían dibujar el resultado de los cortes (sobre papel liso) y calcular las sumas. El uso de papel liso funciona como otra variable didáctica: obliga a alejarse de las cuadrículas, fortalece las particiones, permite la realización de operaciones con números más grandes y favorece su descomposición en grupos de decenas y centenas.

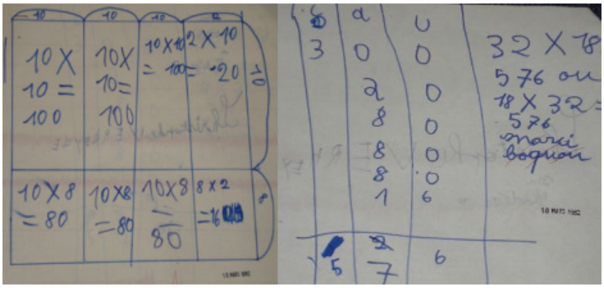


Figura 11. – Producción en grupos de a dos, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

El 18 de marzo resolvieron *32×18*, realizaron una especie de plano de corte en reemplazo de la cuadrícula y sumaron, como lo muestra la figura 11. Las hojas utilizadas eran más grandes que una hoja A4, suponemos que la decisión de utilizar una hoja de aproximadamente 100 cm por 70 cm buscaba facilitar la representación y la escritura de los cálculos parciales. Este grupo resolvió la suma en columna y dispuso el cálculo identificando el valor posicional de las cifras.

Hacia un algoritmo de la multiplicación

En el proceso de búsqueda de economía en los cálculos, la elección de los valores en juego de las variables didácticas invitó a los alumnos a abandonar las particiones irregulares y a privilegiar los productos por 10 para considerar, por ejemplo, cortes que correspondían a productos con números enteros de decenas. Nuevamente, el tamaño de los factores favorece, en esta etapa de la construcción de la técnica, la aparición de un conocimiento nuevo: la descomposición en grupos de dos decenas. Entramos en la cuarta etapa descrita en Brousseau (2010): se reagrupan las centenas y las representaciones no conservan las proporciones. Se redujo el número de sectores y también las sumas parciales. Para resolver *47×63*, propuesta el 30 de marzo, según muestra la Figura 12, el grupo descompuso los factores en decenas y unidades, y redujo la partición armando cuadrados de *20×20* mientras le fue posible. En lugar de 35 secciones, obtuvieron 12 y resolvieron mentalmente algunas sumas (1600 y 800 como resultado de cuatro veces 400 y dos veces 400, respectivamente) con lo cual también ganaron en economía de sumas parciales. Continuaron trabajando sobre hojas de papel liso de tamaño grande.

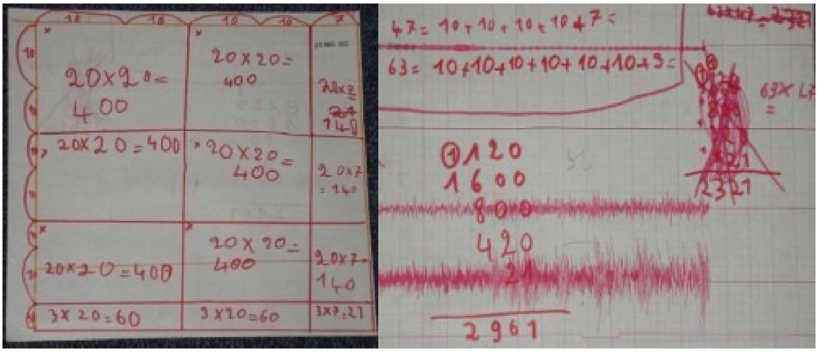


Figura 12. – Producción en grupos, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

El 1 de abril tuvieron que dar la escritura usual del número *42×28*. El trabajo fue en hojas A4; ese cambio de tamaño del papel liso invitó a los alumnos a desprenderse de los productos por 10 para considerar cortes que respondían a una descomposición polinómica de los factores, como se muestra en la figura 13.

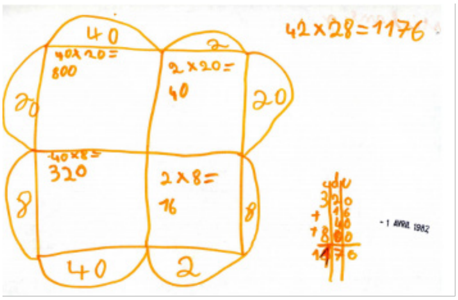


Figura 13. – Producción en grupos, CE1 81/82, caja 130, CRDM-GB, UJI

El corte fue realizado en cuatro sectores obtenidos a partir de la doble distributividad: *(40+2)×(20+8)*: el soporte gráfico cumple su función tecnológica en el control de los sectores, como lo hacía la cuadrícula. En la figura 13, la suma está en disposición vertical y se distinguen los valores posicionales de los sumandos.

En un mes de clases, del 1 de marzo al 1 de abril, con una alta frecuencia semanal de trabajo sobre la técnica, vemos un importante avance en la economía de cálculo de la escritura usual del número. Los alumnos lograron construir lo que entendemos es la respuesta "esperada" para fines de CE1. En los meses que faltaron para finalizar el ciclo lectivo, hubo actividades que consolidaron ese aprendizaje con factores de tres cifras por dos. Al retomar este tipo de tareas en CE2, contamos con evidencias de que no todos los niños recuperaron esta técnica que era la más económica en las condiciones dadas.

Hacia la técnica per gelosia

En CE2, se avanzó en la construcción de la técnica *per gelosia*, considerada en la quinta etapa de Brousseau (2010)[23]. Siguiendo el esquema de la partición, los niños resolvieron los productos parciales y, como muestra la Figura 14, encontraron un modo de identificar el valor posicional de cada cifra en el cálculo de la escritura usual del número *348×67*. Este reconocimiento es fundamental para reducir las escrituras y avanzar en la técnica de las sumas sobre el soporte gráfico que ya utilizaban. Las cifras significativas de las unidades (u) y decenas (d) se encuentran en la casilla abajo, a la derecha. El resto de las casillas corresponden a productos por decenas y centenas por lo cual las unidades dan cero. En cada casilla, los alumnos distinguieron los valores posicionales de las cifras: decena (d), centena (c), unidad de mil (m), decena de mil (dm), etc.

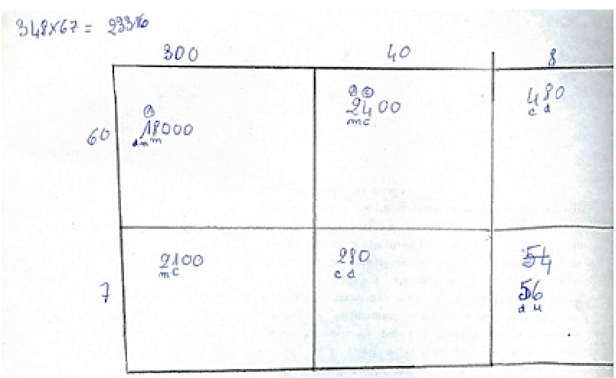


Figura 14. – Producción CE2 85/86,
caja 229, CRDM-GB, UJI

Abajo se muestra la disposición más acabada del mismo cálculo *per gelosia*.

23. El proceso de disposición del cálculo en el algoritmo per gelosia o a la griega como lo llamaban en la Escuela Michelet, no es objeto de este artículo.

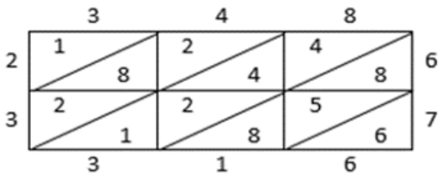


Figura 15. – Disposición de 348×67 en el algoritmo *per gelosia*

Las particiones y la multiplicación: otros recorridos

Nuestra trayectoria de estudio utilizando documentos del CRDM nos permitió acceder a los diferentes aspectos estructurantes de las situaciones didácticas concebidas sobre la división y la multiplicación experimentadas en el COREM. En lo referido a la multiplicación, mostramos cuáles y cómo ciertas técnicas elementales de conteo o ligadas a la suma reiterada, eran descalificadas en beneficio de técnicas que se inscriben más en continuidad con el estudio del sistema de numeración decimal. Por otra parte, las elecciones de variables didácticas pertinentes a las situaciones (tamaño y relaciones entre los números, factores que favorecían la descomposición en decenas e incluso el agrupamiento de decenas, papel cuadriculado o liso, tiempo de resolución) permitían a los alumnos construir nuevos conocimientos a lo largo de todo el proceso. Los materiales del CRDM-GB muestran la fuerte coherencia de esa construcción que les permite a los alumnos producir técnicas de resolución próximas al algoritmo de la multiplicación *per gelosía*.

Notamos que en las publicaciones de ERMEL, particularmente las del año 1978, los autores retoman numerosos aspectos de esta ingeniería sobre la multiplicación experimentada en el COREM. En publicaciones más recientes (ERMEL 1993, ERMEL 2005) las opciones de los autores modifican, en gran medida, los efectos de las situaciones didácticas originales en términos de aprendizajes. Por ejemplo, ante la pregunta: *¿Cuántos casilleros hay en un tablero de ajedrez (8 casilleros en cada lado) ? ¿Cuál es el área de un rectángulo de 8 cm por 15 cm ?*"[24], las disposiciones rectangulares esperadas son las desarrolladas a continuación (figure 16):

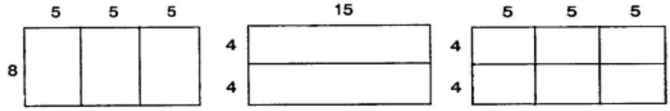


Figura 16 - Descomposición de *8×15* (ERMEL,1993, p. 239)

24. En la tarea de calcular el área de un rectángulo, hay un producto de medidas. Es muy probable que ese producto pueda ser resuelto por los alumnos mentalmente y el desafío está en la construcción del cm^2 como unidad bidimensional, como producto de medidas.

A primera vista la técnica de la partición es idéntica, sin embargo, en este caso, la organización de los cortes apunta a reactivar las técnicas de cálculo mental ya que el factor 15 en una de las particiones puede duplicarse y así resolver *15×4*, y luego sumar ese resultado o duplicarlo. En los otros dos esquemas también la técnica de duplicar favorece el cálculo, y además el factor 5 recupera temas habitualmente trabajados en el estudio de los números naturales: contar de a 2, de a 5, de a 10, etc. Sobre la construcción progresiva de un algoritmo, los autores de la obra señalan:

> Nos parece que los pasos de construcción de la técnica operatoria, utilizando los cortes de rectángulos es pesado y costoso en tiempo en CE1 si se respetan todas las etapas previstas y el proceso de los alumnos. (ERMEL 1993, p. 243).

Estas transformaciones de la ingeniería de partida conducen potencialmente a la modificación del sentido en las prácticas docentes diseñadas y observadas en el COREM. Como recurso destinado a docentes y a jóvenes investigadores en didáctica, señalamos la necesidad de continuar con el desarrollo de conocimientos y de saberes didácticos sobre las ingenierías originalmente desarrolladas en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con el aval de los fondos documentales del CRDM-GB: se trata de hacer visibles nuevos conocimientos que enriquezcan la actividad del investigador en didáctica de la matemática, así como la del formador de docentes.

A modo de cierre y cuestiones abiertas

Cuando abordamos el estudio de las publicaciones difundidas por el IREM de Bordeaux en 1985 sobre la división y la multiplicación, no avizoramos la riqueza y complejidad del objeto en cuestión. Desde la *teoría antropológica de lo didáctico* podemos describir nuestro proceso de involucramiento como un *tipo de tareas* para la cual no conocíamos una *técnica*. Por tanto, era y es para nosotros una tarea problemática atrapar los posibles sentidos de las decisiones tomadas en el aula. Interpretamos que en publicaciones producidas en el COREM no destinadas al ámbito académico, se da un fenómeno de *naturalización*[25] de la técnica en la difusión de esas decisiones. Encontramos un antecedente de esta problemática en el taller realizado en 2011 con docentes en actividad donde se expresó el objetivo del trabajo como: estudiar la secuencia para enseñar la división, y profundizar en el texto para acordar sobre el modo de comunicación de dicha secuencia.

25. Bosch y Chevallard (1999) analizan el fenómeno de naturalización de los modos de hacer de ciertos tipos de tareas. Así, desde el punto de vista de la institución, las técnicas quedan formuladas y reducidas a “conocimientos” y a un “saber hacer”. Esa reducción da cuenta del fenómeno que sentimos ante algunas tareas que, desarrolladas normalmente en una institución, se perciben como naturales sin suponer, entonces, ninguna técnica en particular.

Las etapas del proceso de invención de una técnica para construir un algoritmo de división o de multiplicación exigen desplegar una amplia actividad matemática. La búsqueda de economía en los cálculos y su creciente fiabilidad, involucran y elaboran, a nivel de la acción, nociones básicas del sistema de numeración –particularmente, la descomposición polinómica– y, aún sin explicitarlas, las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y la distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Conjeturamos que el marco gráfico puede ser un aporte para tomar decisiones en el tipo de tareas orientadas a un tratamiento algebraico de lo numérico, por ejemplo ante la consigna: "Se sabe que $a \times b = c$. Sin hacer la multiplicación, calcular $(a+1) \times b$"; una cuadrícula o un plano del producto puede ayudar a decidir si se suma a ob.

Durante décadas, en la Escuela Michelet fue posible el desarrollo de un currículo provocativo, porque se daban ciertas condiciones institucionales para ello, las que, al ser modificadas, se constituyeron en obstáculos para una posible implementación. Al respecto:

> algunos elementos del objetivo previsto se revelaron difíciles de alcanzar: la implementación de las lecciones por parte de los profesores ha mostrado que la dinámica de aprendizaje que las sustenta a menudo escapa a quienes no han tenido acceso a los elementos teóricos desarrollados en el transcurso de las investigaciones. Entonces el aprendizaje puede vaciarse parcialmente de su sentido original; los alumnos vuelven a ser pasivos; el nuevo aprendizaje queda sujeto a las mismas críticas que se le hacían al anterior (Berthelot & Grésillier, 1985, p. 8).

En ese mismo documento, el director del IREM de Bordeaux, Pierre Damey, afirma:

> las investigaciones didácticas llevadas a cabo en la Escuela Jules Michelet hicieron avanzar nuestro conocimiento sobre numerosos fenómenos de enseñanza, aunque la reducción gradual de los recursos necesarios para la investigación (en particular, la disponibilidad de profesores universitarios y de profesores de Escuelas Normales) limitó las posibilidades de esta investigación. (Berthelot & Grésillier, 1985, p. 4)

Según las publicaciones de ERMEL de 1993 y 2005, el trabajo sobre cuadrículas puede resultar costoso y pesado en el tiempo, pero rescatamos el despliegue de actividades matemáticas involucradas en esa tarea y las que acompañaron los procesos de designación de números y escrituras aditivas y multiplicativas. Coincidimos con Artigue (2012)[26] al poner el acento en el valor pragmático y epistémico del cálculo.

Es necesario seguir estudiando tanto las potencialidades de una mirada algebraica, como el discurso tecnológico asociado a las técnicas de multiplicación ya que nos plantean nuevos interrogantes: ¿Cuál sería el momento de introducirlo? ¿Cómo se llevaría adelante ese discurso? ¿En qué etapa de la escolaridad se explicarían las reglas de cálculo y las propiedades usadas en la técnica de la multiplicación? Considerando las dimensiones epis-

26. Véase: http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-2

temológica y didáctica acerca de la actividad matemática en las aulas, ¿cómo se modifica, a través de entornos informáticos, el trabajo matemático en el aula, el papel del docente, el vínculo del alumno con el problema, el vínculo del alumno con el docente? ¿De qué manera se reconfiguraría el problema de la designación de números a través de escrituras aditivas y multiplicativas integrando las Tecnologías de la Información y de la Comunicación? ¿Esta problemática está restringida solo a alumnos o también incluye a docentes?

Además, ¿cuál es el potencial de las diferentes representaciones de los números en el estudio de la aritmética? ¿Cómo se construye en las interacciones en la clase, el lugar de las respuestas que no son correctas y que, sin embargo, no se penalizan? ¿Cómo en esas interacciones los diferentes logros individuales o en pequeños grupos hacen que la acción y el aprendizaje devengan en un desafío colectivo?

El estudio de las producciones de los alumnos da cuenta de que el trabajo en colaboración permite a una clase entera abordar, comprender y resolver problemas que solo hubieran sido entendidos, resueltos y aprendidos por un pequeño número de alumnos que trabaja individualmente y que puede acceder al discurso del docente.

En 2013, en el discurso de recepción del Título de Doctor Honoris Causa en la UNC, Chevallard mencionó que en una ocasión un periodista de la televisión francesa le planteó a quemarropa a un funcionario de alto rango del Tribunal de Cuentas de ese país, "*¿siete por nueve?*". El invitado se situó espontáneamente en el lugar del alumno de la escuela obligatoria que intenta mostrar que sabe algo y para ello debe responder de inmediato, y dijo: "*¡Setenta y dos!*". ¡Respuesta inadmisible, ya que setenta y dos es mayor que siete por diez! (Chevallard, 2013).

¿Y si en lugar de buscar respuestas inmediatas, los actores en diferentes roles en las escuelas – docentes, alumnos, directivos, supervisores, padres, etc. – se propusieran tener una relación con el conocimiento que sea más "lenta"? Digamos, como afirma Chevallard en el discurso citado, una "'matemática lenta', lenta y razonada, y segura". La producción de conocimientos, de cualquier aprendizaje, lleva tiempo. Una noción matemática no se puede aprender de un golpe y de una manera definitiva… al inicio nada es rutinario, ¿es una utopía pensar en destinar tiempo para dar sentido a las nociones y a las técnicas que se estudian en la escolaridad obligatoria?

Las tendencias actuales en investigación educativa, y en didáctica de la matemática en particular, proponen trabajar en colaboración con docentes en diferentes posiciones provenientes de instituciones de nivel superior, secundario o primario. Pensamos que una buena vía para estudiar la difusión de saberes matemáticos en la sociedad es la producción de saberes situados y comunicables que favorezcan la comprensión de las problemáticas del oficio. Son necesarias decisiones políticas que lleven las experiencias puntuales que fueron exitosas, en algún sentido, a otras escalas.

A partir de 1972 y durante 25 años, la escuela Jules Michelet de Talence, Francia, fue un espacio de trabajo y de formación en didáctica de la matemática donde era posible observar fenómenos de enseñanza y de aprendizaje que ocurren en las clases en el seno de experimentaciones llevadas a cabo en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Tales experimentaciones a veces alcanzaban márgenes inéditos en relación a un currículo prescrito, invitando a los docentes a tomar decisiones que pueden ser provocativas en numerosas instituciones escolares, aún hoy.

Esto nos parece que justifica invertir más finamente en las decisiones docentes implementadas en ese ámbito en el que participaron para preservar el sentido de la perspectiva teórica adoptada en ese grupo escolar en el marco del COREM.

En resumen, es la reconstrucción y la investigación de este sentido, lo que nos parece constituirse como un objeto de estudio en sí y una puerta de entrada fructífera para el análisis de decisiones docentes y para la construcción progresiva de medios que permitan la resolución de problemas similares en otros contextos.

Bibliografía

Artigue, M. (2012). *Remarques sur l'enseignement du calcul.*In *Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège* (pp. 76-79). http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-2

Berthelot, R., & Gresillier, M.-F. (1985). *La multiplication au CE1. Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours. Document pour les enseignants*. Université de Bordeaux, IREM de Bordeaux.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-123.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. La mathématique à l'école élémentaire. *Bulletin de l'APMEP,* 282, 57-84. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Annexe-Processus-de-Math.pdf

Brousseau, G. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels. In *Actes du 3e congrès des sciences de l'éducation « Apports des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation » Tome 1, EPI*(pp. 361-378). https://guy-brousseau.com/1417/peut-on-ameliorer-le-calcul-des-produits-de-nombres-naturels-1973/

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(1), 37-125.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. [Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa]. Université de Montréal. http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf/view

Brousseau, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N, 85*, 13-41. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/85n3_1554198829188-pdf

Brousseau, G. (2015). *Commentaires 2015 de Guy Brousseau sur son petit livret de 1964* http://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cours-preparatoire-1965/

Brousseau, G., Bourgeois, M., & Peze, M. (1972). La multiplication (C.E.) *Enseignement élémentaire des mathématiques. Cahier nº 10*. IREM de Bordeaux.

Brousseau, G., Briand, J., Brousseau, N., Gresiller, M., Greslard, D., Lacave-Luciani, M., Teule-Sensacq, P., & Vinrich G. (1985). *La division à l'école élémentaire. Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2* [La división en la escuela primaria. Informe de situaciones de enseñanza realizadas con alumnos de tercero, cuarto y quinto grado]. Université de Bordeaux, IREM de Bordeaux. http://hdl.handle.net/10234/143287

Brousseau, G., Orús, P., Fregona, D., & Gregori, P. (2012). Los recursos del Centre pour l'observation et la recherche en didactique des mathématiques (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria. In J.-C. Régnier, M. Bailleul & R. Gras (Eds.), *Actes du VI Colloque International Analyse Statistique Implicative* (pp. 307-334). Université de Caen.

Brousseau, G., Greslard, D., & Salin, M.-H. (2015). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. In A.-C. Mathé & E. Mounier (Eds.). *Actes du séminaire national de l'ARDM*. (pp. 66-79). IREM de Paris.

Chevallard, Y. (2013). *La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional*. [Acto de entrega del diploma de Dr. Honoris Causa al Profesor Yves Chevallard]. Universidad de Córdoba. http://edumat.famaf.unc.edu.ar/wp-content/uploads/2015/09/YC-DHC-Cordoba-28-11-2013.pdf

Constantin, C., & Coulange, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : une entrée dans la pensée algébrique ? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 9-32. https://doi.org/10.7202/1055726ar

Deramecourt, G., Faucon, E. & Martin, F. (1977). *Enseignement des mathématiques au Cycle Préparatoire : aides pédagogiques.* Programmes et instructions complémentaires du B. O. du 31 mars 1977. Université de Bordeaux.

ERMEL (1978). Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle élémentaire. Tome 2. Sermap/O.C.D.L.

ERMEL (1993). Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année). Hatier.

ERMEL (2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année). Hatier.

Fregona, D., & Orús, P. (2012a). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente. [Ponencia]. *XXXV REM*. Córdoba.

Fregona, D., & Orús, P. (2012b). ¿Cómo enseñar la división en la escuela primaria? Un ejemplo de utilización de los recursos del CRDM-GB para la investigación y la formación del profesorado. [Ponencia]. *XVI^{e} Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad Internacional de Andalucía.

Fregona, D., Delprato, F., & Orús, P. (2013). Desafíos en los procesos de estudio de matemática con adultos de baja escolaridad. [Ponencia]. *IV Congrès International sur la théorie anthropologique du didactique (TAD)*, Toulouse.

Fregona, D., Block, D. & Orús, P. (2017a). Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática. [Ponencia]. *1º Simposio Latinoamericano de Didáctica de la Matemática. Bonito* (Mato Grosso Del Sur).

Fregona, D., & Orús, P. (2017b). El Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: un sitio para explorar prácticas de enseñanza de las matemáticas. In D. Fregona, S. Smith, M. Villareal & F. Viola. (Eds.) *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios: aportes para la educación matemática*. (pp. 109-132). Universidad Nacional de Córdoba. https://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/190405

Fregona, D., Orús, P., Coulange, L., & Train, G. (2023). Le CRDM Guy Brousseau, un bon outil pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique des mathématiques. Séminaire National de Didactique des Mathématiques. In A. Chesnais & H. Sabra, (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2021, IREM de Paris, (*pp. 65-91).

Salin, M-H. (1976). *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*. [Mémoire de Diplôme d'Études Approfondies]. Université de Bordeaux.

Sierra Delgado, T., Bosch Casabó, M., & Gascón Pérez, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación. *Bolema, 27* (47). http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400006