Discontinuités en interdidactique des mathématiques et de la physique : le cas de la parabole au lycée grec

Konstantinos Grivopoulos

Éducation secondaire, Grèce, kgrivop@upatras.gr

Centré sur le système éducatif grec, cet article porte sur les discontinuités didactiques qui se manifestent à l'interface mathématiques – physique, à propos du concept mathématique de parabole. Ce type de conique est exploité en physique pour la modélisation du mouvement balistique des projectiles. En tant qu'enseignant de physique au secondaire en Grèce, nous nous sommes intéressé à un effet curriculaire associé au transfert de concepts mathématiques en classe de sciences. En effet, les lycéens de première scientifique (élèves de 16-17 ans) découvrent la représentation graphique et l'équation de la parabole pour la première fois, en physique, bien avant que les sections coniques n'aient été enseignées en mathématiques. Nous nous attachons à comprendre quels sont les motifs profonds des concepteurs des curricula, concernant les deux disciplines, à propos desquelles ne sont pas créés de moments de synergies officiels, jusqu'à l'heure actuelle. La fragmentation que subit ce savoir (ainsi que bien d'autres) est susceptible d'entraîner des obstacles d'apprentissage. Notre méthode d'analyse didactique de manuels scolaires, élaborée à partir des notions de dialectique outil – objet, de registre sémiotique, de cadre de rationalité et de praxéologies fait émerger des discontinuités didactiques remarquables. Leur franchissement peut s'opérer par la mise en œuvre d'un enseignement appuyé sur une approche interdidactique dynamisant les allers-retours entre le traitement mathématique et le traitement cinématique de la parabole.

Mots-clés : parabole, interface mathématiques – physique, registre sémiotique, cadre de rationalité, organisation praxéologique

Discontinuities in the interdidactics of mathematics and physics: the case of the parabola in greek high school

Focusing on the Greek educational system, this article deals with the didactic discontinuities manifested at the mathematics-physics interface, concerning the mathematical concept of the parabola. This type of conic is used in physics to model the ballistic motion of projectiles. As a Greek high school physics teacher, our interest is drawn to a curricular effect associated with the transfer of mathematical concepts into the

Grivopoulos, K. (2024). Discontinuités en interdidactique des mathématiques et de la physique : le cas de la parabole au lycée grec. *Recherches en didactique des mathématiques*. 44-1, 11-44.
https://doi.org/10.46298/rdm.13746,

science classroom. Indeed, high school science students (16-17 years old) discover the graphical representation and the equation of the parabola for the first time, in physics, long before the subject of conic sections is taught in mathematics. As a result, it is the teacher in charge of physics who gives the students the first basic knowledge, according to his or her own conceptions, while the introduction of the concept by the teacher of mathematics is taught later in the school year. We are interested in understanding the deep motivations of the curricula designers regarding the two disciplines, between which no official moments of synergy have yet been created. The fragmentation of this knowledge (but also of many others) is likely to create learning obstacles. We apply a method of didactic analysis of textbooks, developed from the notions of tool-object dialectic, semiotic registers, rationality framework and praxeologies. The results show remarkable didactic discontinuities that can be overcome by implementing a teaching based on an inter-didactic approach that stimulates the «back and forth» between the mathematical and the kinematic treatment of the parabola.

Keywords: parabola, mathematics – physics interface, register of semiotic representation, framework of rationality, praxeological organization

Discontinuidades en interdidáctica de las mathemáticas y la física: el caso de la parábola en la escuela secundaria griega

Centrándose en el sistema educativo griego, este artículo aborda las discontinuidades didácticas que se manifiestan en la interfaz entre las matemáticas y la física, en relación con el concepto matemático de parábola. Este tipo de cónica se utiliza en física para modelar el movimiento balístico de los proyectiles. Como profesor de física de secundaria en Grecia, el trabajo se centra en el estudio de un efecto curricular asociado a la transferencia de conceptos matemáticos a la clase de ciencias. De hecho, los estudiantes de ciencias de secundaria superior (16-17 años) descubren la representación gráfica y la ecuación de la parábola por primera vez, en física, mucho antes de que se enseñe el tema de las secciones cónicas en matemáticas. En consecuencia, es el profesor encargado de la física quien transmite los primeros conocimientos básicos a los alumnos, según sus propias concepciones, mientras que la introducción del concepto por parte del profesor de matemáticas se retrasa durante el curso escolar. El estudio pretende comprender los motivos profundos de los diseñadores de los planes de estudio en relación con las dos disciplinas, sobre el que no se crean momentos de sinergia de manera oficiales, hasta ahora. La fragmentación de estos conocimientos (pero también de muchos otros) puede generar obstáculos para el aprendizaje. Aplicamos un método de análisis didáctico de los libros de texto escolares, desarrollado a partir de las nociones de dialéctica herramienta-objeto, registro semiótico, marco de racionalidad y praxeología. Los resultados muestran notables discontinuidades didácticas, que pueden superarse implementando una enseñanza basada en un enfoque interdidáctico que estimule el «ida y vuelta» entre el tratamiento matemático y el cinemático de la parábola.

Palabras claves: parábola, interfaz matemática–física, registro semiótico, marco de racionalidad, organización praxeológica

Introduction

Cet article se propose d'étudier un phénomène didactique observé à l'interface des mathématiques et de la physique, au lycée en Grèce, à propos du concept mathématique de parabole et de son environnement conceptuel.

Notre problématique principale réside dans la possibilité d'interdisciplinarité entre mathématiques et physique, dans le traitement de la parabole. En première scientifique (1re S, enseignement général), ce concept en classe de physique s'applique à la modélisation du mouvement balistique des corps. Il s'agit du tout premier cours par lequel débute l'année scolaire qui étudie le mouvement des corps physiques lorsqu'ils sont soumis à une vitesse initiale horizontale[1] et à la seule accélération (supposée constante) de la pesanteur. La trajectoire décrite est une portion de demi-parabole régie par une équation du second degré, $y = f(x)$. Cependant, le concept de parabole n'est enseigné en mathématiques de 1re S que vers la fin de l'année scolaire. À défaut de coordination entre les deux disciplines (tant du point de vue du curriculum prescrit que du curriculum réalisé, (Perrenoud, 1993)), le transfert des connaissances mathématiques de base semble, implicitement, être à la charge de l'« enseignant de physique ». Ce terme mis entre guillemets sous-entend une particularité de l'institution éducative en Grèce : le professeur est potentiellement polyvalent (Journal officiel du gouvernement grec, 2006). Ainsi, l'enseignement de n'importe laquelle des disciplines scientifiques, regroupées dans la section 04 – *i.e.* physique, chimie, biologie et géographie-géologie, toutes étant considérées distinctes et autonomes dans le système éducatif – peut être assuré par des enseignants de la section 04, qu'il s'agisse de diplômés de physique, ou de biologie, etc., c'est-à-dire, indépendamment de leur spécialité d'origine. En outre, ce critère importe peu dans le mode de recrutement des enseignants de la section 04 du domaine public, pas plus, d'ailleurs, que n'est nécessitée une formation préalable en didactique. À titre d'exemple, un professeur de chimie, de biologie ou de géologie, doit également dispenser l'enseignement de la physique, si, dans l'établissement où il exerce, aucun diplômé de physique n'est affecté (cas habituel en province, où l'effectif des élèves est faible). Se pose donc la question des compétences en mathématiques des enseignants de la section 04, lorsque leur cursus universitaire n'implique pas une formation approfondie en mathématiques à l'instar de celle des enseignants de physique. D'autre part, la mise en œuvre de bonnes pratiques enseignantes, comme les synergies didactiques entre disciplines qui permettraient de surmonter l'autarcie disciplinaire discutée ici, gagne assez lentement du terrain. De plus, l'institution ne distribue aux élèves qu'un seul manuel officiel par discipline, que les enseignants ont l'obligation légale d'utiliser en respectant la chronologie de la matière à enseigner, telle qu'affichée

1. L'exploitation de mouvements paraboliques, issus de vitesses initiales avec un angle initial quelconque, ne fait plus, depuis longtemps, partie des programmes.

au sommaire. Enfin, les enseignants de la section 04 ne sont pas guidés dans le transfert de la parabole des mathématiques vers la physique, à cause d'un manque de prescriptions institutionnelles à ce sujet. Cela les amène à enseigner à leur guise, en s'appuyant sur leurs propres représentations de la parabole.

Dans ces conditions, nous nous demandons si l'on n'assiste pas à une sorte de fragmentation disciplinaire du savoir ou, au contraire, si l'intention didactique des concepteurs des programmes consiste à envisager la première rencontre de la parabole en physique comme un outil paradigmatique pour l'introduction, en second lieu, du concept mathématique avant un retour final sur la notion de modèle en physique. Une analyse didactique des programmes et des contenus des manuels des disciplines concernées contribuerait à éclaircir la situation.

La parabole dans les curricula d'enseignement grecs

Nous présentons tout d'abord les éléments curriculaires se rapportant au concept de parabole, en classe de première scientifique.

Curriculum de mathématiques

D'après les programmes des mathématiques, la parabole est enseignée en 1re S, dans le cadre de l'enseignement obligatoire « Mathématiques de sciences positives », uniquement pour les élèves qui poursuivent la série « sciences positives » (*i.e.* mathématiques, physique, chimie et biologie). Dans le manuel de l'élève, la parabole est abordée au troisième chapitre, intitulé « Sections coniques ». La présentation est structurée en cinq paragraphes : « Définition de la parabole », « Équation de la parabole », « Propriétés de la parabole », « Tangente à la parabole » et « Propriété de réflexivité » (cette dernière étant hors matière d'enseignement).

En introduction, le manuel opère une référence historique aux travaux des géomètres anciens qui identifiaient une famille de lignes, les coniques, liée à des problèmes de géométrie, tels que la duplication du cube d'arête a. Ce problème est associé au problème algébrique[2] d'insertion de deux moyennes proportionnelles x et y entre deux longueurs a et $2a$, pour lesquelles :
$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ donc $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$; $xy = 2a^2$.
Le manuel fait remarquer que les représentations graphiques des deux premières formules sont des paraboles. Les auteurs citent le postulat épistémologique de la

2. Les auteurs évoquent, aussi, les travaux des philosophes Descartes et Fermat qui appliquaient les processus algébriques aux problèmes géométriques et inversement.

géométrie analytique contemporaine selon lequel l'équation d'une courbe, jadis levier de résolution de problèmes géométriques, devient un moyen de définition et de représentation graphique de cette courbe (Αδαμόπουλος *et al.*, 2012, p. 56)[3].

Quant à la parabole, il est précisé que cette conique est générée par l'intersection d'un cône rectangle (90° au sommet du cône) avec un plan perpendiculaire à une génératrice.

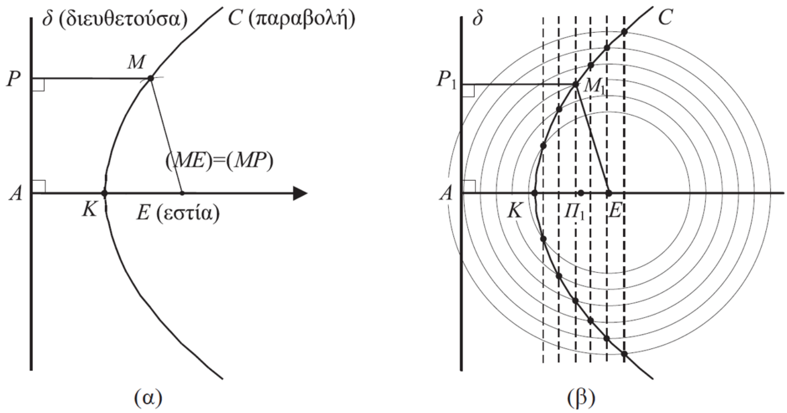


Figure 1. – (a) Approche par foyer (E) – directrice (δ)
(b) Technique de détection d'un point quelconque M_1

Suit le paragraphe « Définition de la parabole » dans lequel les auteurs adoptent la définition par foyer – directrice, comme lieu géométrique des points équidistants d'une droite donnée et d'un point donné situé hors de cette droite (fig. 1a).

Ils présentent une illustration – issue essentiellement de l'ancienne méthode de Roberval[4] – qui permet, comme l'explique le manuel, de déterminer un point quelconque M_1 d'une parabole en tant qu'intersection d'un cercle de centre E et de rayon R, ($R > \frac{1}{2}\mathrm{EA}$) avec la perpendiculaire à l'axe de symétrie qui passe par M_1 (fig. 1b). Par conséquent, cet objet d'enseignement est considéré à la fois comme une section conique et comme un lieu géométrique. L'interprétation générale de la parabole en tant que section d'un cône de révolution par un plan parallèle à une génératrice n'y est pas abordée. De même, l'approche de la fonction polynomiale du second degré ne fait pas partie des programmes de mathématiques actuels.

3. Dans cet article, c'est nous qui traduisons les citations issues des documents officiels grecs.

4. HMCA « Histoire des Mathématiques en Champagne - Ardenne » : https://histoiremaths-champard.fr/docs/articles/histtang3.html

En s'aidant des figures 2 et 3 placées au début du paragraphe « Équation de la parabole », les auteurs considèrent quatre cas de paraboles centrées à l'origine, qui admettent comme équation soit $y^2 = 2px$ (fig. 2) soit $x^2 = 2py$ (fig. 3) :

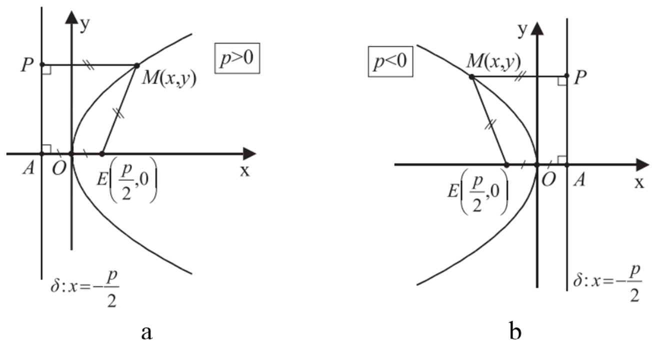


Figure 2. – Les paraboles de sommet O (origine) ayant $x'x$ pour axe de symétrie

Deux propriétés géométriques du concept sont aussi développées, à partir des questions suivantes :

- **Comment déterminer l'axe de symétrie en fonction de l'équation de la parabole ?**
- Quel demi-plan du repère, par rapport à la directrice, contient la courbe ?

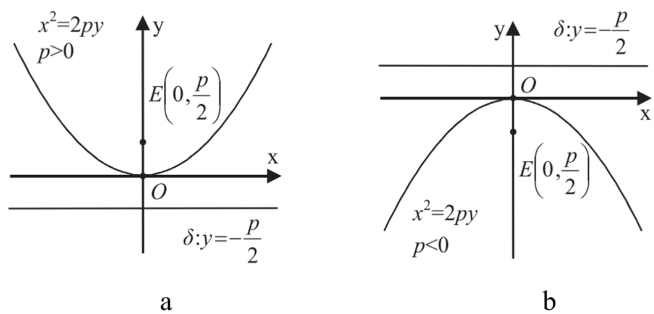


Figure 3. – Les paraboles de sommet O (origine) ayant $y'y$ pour axe de symétrie

La tangente en un point d'une parabole est discutée en détail, dans un paragraphe à part. L'équation de la tangente passant par ce point est algébriquement exprimée, mais le processus d'obtention de cette formule est exclu de la matière à enseigner. Le cas des paraboles non centrées à l'origine (admettant comme équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$) ne font pas, non plus, partie des programmes. S'agissant du livre du professeur de mathématiques, il est proposé de donner aux élèves :

> un exercice d'équation de la parabole de foyer E (1,0) et de directrice δ : $x = -1$ (ou autre). De cette façon, les élèves entrent en contact avec la formule de l'équation de la parabole. (MÉNG, 2021, p. 12).

Enfin, pour la section de la parabole, les conseillers préconisent six séances d'enseignement (de quarante-cinq minutes chacune, au lycée grec). Nous soulignons encore, que les rédacteurs des programmes incitent, en principe, les enseignants des mathématiques à

> construire, chez les élèves, des liens conceptuels à l'intérieur des mathématiques, mais aussi entre celles-ci et d'autres disciplines, dans l'objectif de mettre en exergue la complémentarité entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. [Ainsi que d'éduquer les élèves à] l'usage du langage mathématique pour la formalisation mathématique des phénomènes physiques (MÉNG, 2011, p. 1).

Pourtant, dans le manuel des mathématiques on ne retrouve aucune évocation de la parabole relative à la modélisation du mouvement des projectiles.

Curriculum de physique

Nous envisageons les deux occurrences de la parabole sous l'angle de la cinématique et, plus exactement, du mouvement balistique. La première apparition a lieu lors de l'étude du mouvement balistique d'une masse dans un champ de pesanteur et, la seconde, à propos du déplacement d'une charge électrique sous l'action d'un champ électrique uniforme. La figure 4, extraite du tout premier cours du manuel de physique (Βλάχος, *et al*. 2013), représente la trajectoire d'un corps lancé à une vitesse initiale υ_0 depuis une hauteur *h* du sol (g étant la pesanteur terrestre vectorielle supposée constante) :

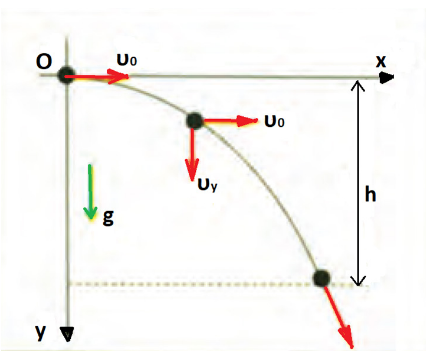


Figure 4. – Arc de parabole illustrant la trajectoire du projectile

Nous remarquons, en préambule, que le système d'axes de la figure 4 et celui de la figure 3a sont en relation de symétrie miroir (pourtant, notion inconnue des élèves).

Revenons aux auteurs du manuel de physique qui mettent en œuvre le principe de l'indépendance des mouvements[5] pour analyser le déplacement du corps en deux dimensions et établir ainsi les équations horaires :

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \qquad \upsilon_y = g\,t$$

$$x = \upsilon_0\,t \qquad y = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Figure 5. – Extrait du manuel de physique indiquant les équations horaires de la vitesse et des positions *x(t)* et *y(t)*

Jusqu'ici, les auteurs du manuel ne font aucune référence explicite à la forme géométrique de la courbe, ni à l'équation du mouvement qui peut facilement résulter par effacement du temps entre les *x(t)* et *y(t)*, en référence à la figure 4 :

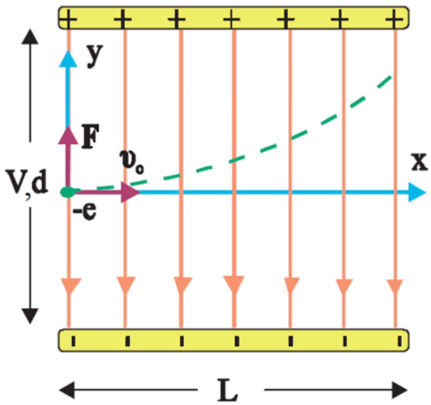
$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0{}^2}$ (1)

Toutefois, la formule (1) est couramment pratiquée par les élèves, quand ils s'entraînent aux exercices proposés par l'enseignant. Il est opportun de citer les objectifs d'apprentissage définis dans les instructions officielles :

> Les élèves seront capables :
>
> - d'appliquer le principe d'indépendance des mouvements pour analyser le mouvement balistique ;
> - d'étudier ce mouvement à partir des connaissances antérieures sur les mouvements de base le synthétisant ;
> - d'expliquer la forme géométrique de la trajectoire et en déterminer l'équation ;
> - de calculer la portée et le temps de chute du corps. (MÉNG, 2015, p. 151).

Tandis que l'exploitation du savoir satisfait aux deux premiers objectifs, pour l'accomplissement des autres il faut attendre le chapitre 5 du manuel, ayant pour titre « Champ électrique ». Le paragraphe 5.8, « Mouvements de particules chargées dans un champ électrostatique uniforme », examine le mouvement d'un électron (ou proton) projeté avec une vitesse initiale υ_0 dans une direction formant un angle droit (90°) avec les lignes du champ (fig. 6).

5. Ce principe stipule qu'un corps participant à deux ou plusieurs mouvements simultanés et indépendants occupe, chaque instant t, la même position qu'il occuperait si ces mouvements étaient en cours d'exécution successivement l'un après l'autre.



Σχ. 5.26 Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο με ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Η δύναμη που δέχεται από το πεδίο το αναγκάζει να διαγράψει παραβολική τροχιά.

Figure 6. – « L'électron pénètre dans le champ électrique à une vitesse perpendiculaire aux lignes. La force exercée l'induit à décrire une trajectoire parabolique »
Βλάχος, *et al.* 2013, p. 159.

La particule subit donc la force électrique constante (à l'intérieur du champ), soit :
$F = \frac{Ve}{d}$ (*V* : tension électrique ; *e* : valeur absolue de la charge électrique ; *d* : distance entre les armatures d'un condensateur plan dans lequel règne le vide).

Si le poids de l'électron est négligeable, la trajectoire effectuée est une portion de parabole – à l'exception des bords du dispositif – dans le plan *xy* indiqué ci-dessous, perpendiculaire aux plaques.

Nous mettons en évidence un choix didactique important des auteurs : le terme « parabolique » ainsi que l'équation de la trajectoire du corps sont mentionnés pour la première fois, bien que le cours sur le mouvement de la bombe ait précédé. La manière dont les auteurs donnent le procédé d'obtention de l'équation de la trajectoire, conformément au repère choisi, apparaît dans l'extrait suivant issu du même manuel :

$$y=\frac{1}{2}\alpha_y t^2 \ \text{ή} \ y=\frac{1}{2}\frac{Ve}{dm_e}\frac{x^2}{\upsilon_0^2} \ \text{ή} \ y=\frac{Ve}{2dm_e\upsilon_0^2}x^2$$

Πρόκειται για μια σχέση της μορφής $y = \alpha x^2$, άρα η τροχιά του ηλεκτρονίου είναι παραβολική.

Figure 7. – Démonstration de l'équation de la trajectoire de l'électron

L'équation est déterminée par la fonction parabolique et est exprimée au travers de grandeurs physiques (α_y : accélération au sens de l'axe du champ ; m_e : masse de l'électron ; t : temps). Comme il est remarqué, « il s'agit d'une fonction associée à une formule de type $y = ax^2$, donc la trajectoire de l'électron est parabolique » (Βλάχος, *et al*. 2013, p. 159). Il semble que les auteurs du manuel de physique soient tacitement attachés à l'approche de la fonction polynomiale, laquelle est exclue des programmes de mathématiques, comme déjà évoqué.

Pour clore l'exploration de ce manuel, nous présentons en figure 8, une image également extraite du manuel, par laquelle les auteurs montrent un exemple résolu concernant la modélisation cinématique de la chute d'une bombe, lancée par un avion qui décrit un mouvement rectiligne uniforme le long d'un axe horizontal. Selon les approximations prises en compte, la bombe est soumise uniquement à la pesanteur (dont le vecteur est supposé constant) tandis que, dimensions du corps, frottement de l'air, poussée d'Archimède, effets d'aérodynamique et rotation de la Terre sont considérés comme négligeables.

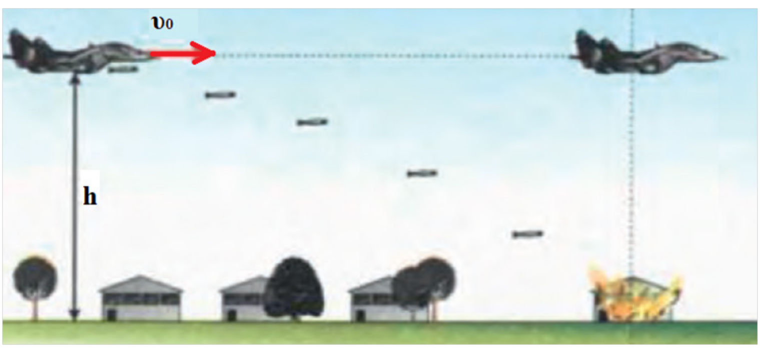


Figure 8. – Mouvement d'une bombe depuis un avion qui vole à vitesse constante

Quoique ce thème heuristique se prête à l'élaboration de liens interdisciplinaires entre la balistique et le concept mathématique de parabole examiné, l'analyse se borne aux seules équations horaires du mouvement de la bombe (fig. 5).

Dans ce texte, nous tentons de faire émerger les échanges interdidactiques qui pourraient être réalisés, à partir de certains entraînements présents en classe de physique.

Questionnement de la recherche

Dans ce travail, nous sommes amenés à mettre à l'épreuve le concept de parabole, suivant une approche interdidactique qui relie des méthodes d'analyses didactiques et épistémologiques du savoir en question. De ce fait, notre questionnement englobe les trois questions suivantes :

- Est-ce qu'il y a des discontinuités dans l'enseignement dispensé, du point de vue des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique, à propos de la parabole ?
- Quelles praxéologies physiques et mathématiques associées à l'étude du mouvement balistique peut-on identifier ?
- Comment serrait-il possible d'articuler au mieux les occurrences susceptibles de transposition de la parabole dans les deux disciplines appariées ?

L'analyse didactique et épistémologique des manuels retenus se fonde sur le cadre théorique qui suit.

Cadre théorique

Le cadre théorique articule l'approche didactique conjointe du professeur et des élèves et l'approche anthropologique en didactique avec, notamment, la notion d'organisation praxéologique du savoir. Plus spécifiquement, nous nous sommes inspirés d'un modèle interdidactique mathématiques – physique, que nous avons enrichi avec la dialectique outil/objet.

Action didactique conjointe

La reformulation, en termes d'action didactique conjointe (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000), de notre problématique repose sur le triplet fondamental de trois types de genèses que nous esquissons brièvement.

La chronogenèse suscite des réflexions de la noosphére sur :

- le temps d'enseignement adéquat du mouvement balistique, en physique ;
- le moment d'arrivée du concept de parabole, en mathématiques ;
- l'opportunité de séquences d'enseignement codisciplinaires afin d'associer i) la trajectoire des projectiles à la géométrie de la parabole et, ii) l'équation du mouvement parabolique aux formules paramétriques $y = f(x)$ (figures 2 et 3).

La topogenèse conditionne les transactions didactiques entre les acteurs de la relation didactique, de manière bipolaire : d'une part, l'implication des deux disciplines imposerait une action conjointe entre enseignants de mathématiques et de physique en précisant qui enseignera et sous quel statut épistémologique le concept de parabole permettant à l'autre de le traiter dans sa propre discipline. D'autre part, on sous-entend le partage des responsabilités appréhendées au sein du contrat didactique *in situ*, entre enseignants et élèves.

La mésogenèse (genèse du milieu) comporte le processus d'élaboration d'un système de significations mutuelles entre professeurs et élèves (Sensevy, 2007). À titre d'illustration, les professeurs de physique et de mathématiques construisent avec leurs élèves la signification cinématique de la parabole, vue comme lieu géométrique.

Dialectique outil/objet

Douady (1992) distingue les différents statuts épistémologiques qu'un savoir mathématique peut revêtir dans la relation enseignement / apprentissage : le statut d'objet (savoir institutionnalisé, indépendant de tout contexte particulier) ; le statut d'outil implicite (savoir sous-entendu permettant l'introduction d'un objet mathématique) ; le statut d'outil explicite (savoir raisonnablement impliqué dans un contexte problématique donné). Entre ces statuts peut s'installer une dialectique, au sens des changements de statut, de nature fonctionnelle, descriptive ou explicative (Douady, 1993). Pour ce qui nous occupe ici, la trajectoire balistique d'un corps en tant qu'objet de la cinématique peut se modéliser triplement : comme lieu géométrique, comme intersection entre un cône de révolution et un plan, et comme fonction numérique du second degré. Le transfert dans le contexte de la physique d'un objet mathématique lui apporte des significations spécifiques. Il se convertit alors en outil qui sert aux enseignants de physique à faire des choix et à prendre des décisions pour mettre leurs élèves dans une certaine situation (*ibid*).

Nous décrivons maintenant un modèle interdidactique des mathématiques et de la physique, élaboré par Malafosse, Lerouge et Dusseau (2001). Aux fondements de cet édifice, nous retrouvons les trois notions heuristiques suivantes.

Registre de représentation sémiotique

Notion conçue par Duval (1993 ; 1995) dans le but d'étudier les processus de conceptualisation des objets mathématiques, appréhendés par le truchement de représentations mentales pourvues de signes appartenant à un ou plusieurs registres de représentation sémiotique (langage naturel, formel et gestuel, graphiques, équations, etc.). Duval (1993) met en exergue le processus de congruence sémantique – mise en œuvre coordonnée d'au moins deux registres de différents types – étroitement lié à la construction des connaissances. Dans la même veine, Tiberghien (2011) affirme que la construction du sens s'élabore en employant alternativement divers registres sémiotiques d'un même concept, pour lesquels l'élève a bien appréhendé les concordances qui les relient. Malgré tout, par un effet de cloisonnement de registres, les élèves restent souvent dans une « approche mono-registre », déplorent Malafosse, Lerouge et Dusseau (2000, p. 81).

Cadre de rationalité

Originellement introduit par Lerouge (1992) et repris par Malafosse et ses collaborateurs (2000), un cadre de rationalité permet une modélisation des rapports entre différentes interprétations mentales et représentations culturelles, impliquées dans l'enseignement, ayant trait à des objets et événements du monde naturel ou à des concepts épistémiques transférables des mathématiques à une autre discipline. Ainsi, un cadre de rationalité

> est un ensemble cohérent du fonctionnement de la pensée caractérisé par quatre composantes : son monde d'objets, ses processus de conceptualisation, ses règles de raisonnement et de validation, et enfin ses registres de signifiants. (Malafosse *et al.*, 2000, p. 91).

Selon la nature des disciplines appariées, on peut distinguer plusieurs cadres de rationalité : le cadre de rationalité des mathématiques, le cadre de rationalité de la physique, etc. Malonga-Moungabio pose alors la question de

> la manière dont les jeux de cadres de rationalité sont pris en charge et mis en œuvre dans les manuels scolaires. (2009, p. 341).

À la manière du chercheur précité, nous nous demandons s'il y a une discontinuité didactique au sujet de la parabole entre le cadre de rationalité des mathématiques et celui d'un domaine de réalité extramathématique, la physique. La discontinuité didactique est entendue comme l'absence de continuité didactique, laquelle est bâtie, selon Malonga-Moungabio (2006), sur un travail collaboratif et complémentaire mené par les enseignants (de mathématiques et de physique, en l'occurrence), quand il y a des références réciproques, « jeu d'aller-retour », au sujet d'un concept transférable. Cet auteur utilise le terme de continuité didactique afin de :

> caractériser l'objectif de mise en relation, au niveau scolaire, des disciplines scientifiques. Chacune garde sa spécificité, mais des liens concrets sont établis. Pour ce qui concerne la relation mathématiques – physique, la continuité porte sur la modélisation de systèmes [ici, sur leur modélisation par la conique de la parabole]. (2009, p. 339).

Le même chercheur a pu spécifier les composantes de la continuité didactique :

> quelle évocation [faite au sein d'une discipline] de l'autre discipline, quelle part de la modélisation et du traitement des modèles est dévolue à chaque discipline, quelle coordination des méthodes, des notations, du vocabulaire, et, *in fine*, quels types de tâches données aux élèves et quelles compétences attendues/évaluées. (2008, p. 461).

Par opposition, nous appelons discontinuité didactique l'absence tant de synergies didactiques entre des disciplines appariées, que d'articulations entre le vocabulaire, les registres sémiotiques et les démarches, utilisés au sein de chaque discipline.

Organisation praxéologique du savoir

Chevallard (1997) postule que l'analyse de l'enseignement est susceptible de se décrire par des entités minimales, les praxéologies, qui forment une organisation praxéologique. Si l'étude d'un savoir s'inscrit dans le champ des mathématiques, l'auteur parle d'organisation mathématique, sinon il s'agit d'« organisation mathématique mixte » (Chevallard & Wozniak, 2003). D'une manière générale, une organisation praxéologique peut être modélisée moyennant le tétragramme [T/τ/θ/Θ], proposé par Chevallard (*ibid.*), où :

- T symbolise un type de tâches t_i (i = 1, 2, …) ;
- τ représente un savoir-faire, une technique pour accomplir les tâches du type T ;
- θ constitue la technologie, c'est-à-dire, un discours raisonné sur la technique qui la justifie, la rend intelligible et, le cas échéant, la reproduit ;
- Θ correspond à la théorie qui encadre et éclaire la technologie θ.

Ainsi structuré, le cadre théorique nous permet de comprendre si et dans quelle mesure il y a une certaine parcellisation du savoir dans les deux disciplines, à travers le prisme des critères qualitatifs qui suivent.

Discontinuités dans l'enseignement des deux disciplines

Cette partie a pour objectif de répertorier les discontinuités qui pèsent dans les deux enseignements, au regard de la parabole.

Chronogenèse d'apparition de la parabole

Le concept de parabole est étudié en 1re S, en mathématiques vers la fin de l'année scolaire, alors qu'en physique, certains de ses aspects (trajectoire, équation de parabole, tangente) sont sous-jacents à la modélisation des phénomènes balistiques, dès le début de l'année.

Objets de manipulation

En mathématiques, les objets de manipulation sont les instruments de géométrie pour les tracés des éléments géométriques de la parabole, ainsi que de didacticiels de géométrie dynamique. En physique, ce sont notamment des objets du monde quotidien (bille de verre, jet d'eau, etc.) dont la trajectoire peut être illustrée moyennant un dispositif expérimental. Bien entendu, la trajectoire réelle manifeste une certaine divergence par rapport à la parabole parfaite des mathématiques, à cause du frottement de l'air, des effets d'aérodynamique, etc.

Registres sémiotiques

Les divers types de registres auxquels ont recours les enseignants de mathématiques et de physique se différencient par : le vocabulaire utilisé, le symbolisme, les graphiques, les choix de repères et d'axes de coordonnées propices aux objectifs d'apprentissage. Par exemple, la trajectoire des projectiles dans le champ de pesanteur est, forcément, située dans le plan vertical d'un repère cartésien et la concavité de la parabole est toujours tournée vers le sol, tandis qu'en mathématiques il existe une infinité de cas. En outre, le sens de l'axe $y'y$ du système de coordonnées choisi se présente, très souvent, inversé (*i.e.* orienté vers le bas en physique pour être en accord avec le sens de la pesanteur g et vers le haut par convention en mathématiques, *cf.* § Organisation praxéologique mixte, fig. 17, 18). Semblablement, il est possible en physique d'opter pour un axe $x'x$ orienté vers la gauche, si le vecteur vitesse initiale du corps est opposé à celui signalé dans la figure 4. Tout au contraire, en mathématiques, les élèves travaillent dans des bases directes sans anticiper d'autres cas, étant donné que l'application balistique de la parabole est ignorée par le manuel de cette discipline. Enfin, en cinématique, la représentation graphique de la relation entre la distance verticale y du projectile et le carré de la distance horizontale x est une activité constructive de sens, que nous explicitons plus bas.

Praxéologies

Le manuel de mathématiques propose aux élèves des types de tâches purement intramathématiques, que nous pouvons catégoriser comme suit :

- Écrire l'équation d'une parabole dont un élément (foyer, directrice) est donné et inversement ;
- Écrire l'équation de la tangente à une parabole en un point précis ;
- Effectuer des tâches combinant deux coniques différentes ; par exemple « Prouver que le cercle d'équation $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ est bitangent à la parabole $y^2 = 4x$, etc.

En revanche, en classe de physique, les types de tâches impliquées relèvent d'une organisation mixte, susceptible d'ouvrir des possibilités d'interdisciplinarité. Pourtant, les élèves peuvent accomplir ces tâches par la seule application des équations horaires, sans recours explicite au concept de parabole. Nous constatons qu'en mathématiques, la parabole revêt le statut d'objet, alors qu'en physique, elle a celui d'outil implicite, dénué d'intention didactique relative à son insertion dans l'objet mathématique. Dans la suite, nous proposons une démarche à double sens entre la physique et les mathématiques, pour laquelle le travail de la parabole dans le modèle mathématique permet d'étudier le phénomène physique.

Règles de raisonnement

Dans l'enseignement des mathématiques, l'induction et la déduction sont utilisées pour construire des raisonnements. Dans le cas étudié, le professeur fournit la formule algébrique de la fonction dont la représentation graphique est une parabole (parfaite) et l'étude du concept s'effectue par déduction. En physique, les élèves mettent en place, à l'aide du professeur, la méthode expérimentale dans l'objectif d'un apprentissage basé sur la démarche hypothético-déductive. Dans la phase de modélisation, il est indispensable de considérer les approximations permettant d'assimiler la trajectoire réelle (observée en laboratoire) à un arc de parabole au sens mathématique.

Cadres de rationalité impliqués

À la suite des remarques qui ont précédé, nous avons concrétisé les cadres de rationalité des mathématiques et de la physique au sujet de la parabole (tableau 1) :

Tableau 1. – Les quatre composantes des cadres de rationalité

Cadre de rationalité des mathématiques	
Monde d'objets	Un cône de signalisation (plot) coupé au couteau de manière spécifique et la forme ainsi générée et prolongée ; Règle, équerre, crayon et ficelle sur une planche à dessin et ligne manuellement tracée ; Didacticiels de géométrie dynamique
Processus de conceptualisation	Du tracé (manuel ou informatique) au signe abstrait (courbe géométrique) et à l'objet théorique de la parabole (fonction mathématique, registre graphique, etc.)
Règles de raisonnement et de validation	Démonstration ; Raisonnement déductif, inductif, abductif ; Coexistence de plusieurs théories de géométrie validées
Registres de signifiants	Figures géométriques, lieux géométriques, registre caractéristique (Issa, 2019), fonctions de second degré $y = f(x)$ et leurs graphiques, qui renvoient aux signifiés idéels de la culture mathématique
Cadre de rationalité de la physique	
Monde d'objets	Corps solide de masse *m* ; Dispositif de lancement ; Champ de pesanteur terrestre, etc. ; Trajectoire dans l'air atmosphérique ou autre milieu ; Outils et dispositifs d'expérimentation (stroboscopie, papier millimétré, bâtons de tailles multiples, etc.) ; Didacticiels de simulation
Processus de conceptualisation	Des objets et effets réels aux concepts abstraits et à la modélisation scientifique (loi du mouvement) ; Du couple des valeurs mesurées (x, y) au signe abstrait du plan et au concept de position instantanée de l'objet idéel (point matériel) dont la trajectoire vérifie la fonction parabolique $y = f(x)$ (loi du mouvement)
Règles de raisonnement et de validation	Démarche hypothético-déductive (observation, questionnement, hypothèses, validation expérimentale, modélisation synthétique) ; Déterminisme causal et prédictibilité ; Réfutabilité
Registres de signifiants	Dessins réalisés par des logiciels ou à la main censés représenter des paraboles ; Courbes obtenues à partir de points graphiques (issus de données expérimentales) comportant des barres d'erreur (⊕) informant sur la marge d'erreur

Nous proposons une schématisation des démarches d'enseignement du point de vue des registres sémiotiques activés (fig. 9). À noter que les illustrations de cette figure (à l'exception du graphique sur papier millimétré, à droite) proviennent de manuels de mathématiques de 1re S (Αδαμόπουλος, *et al*. 2012, p. 80, 89, 90, 91)[6], ainsi que du manuel de physique grec (Βλάχος, *et al*. 2013, p. 8, 9, 161).

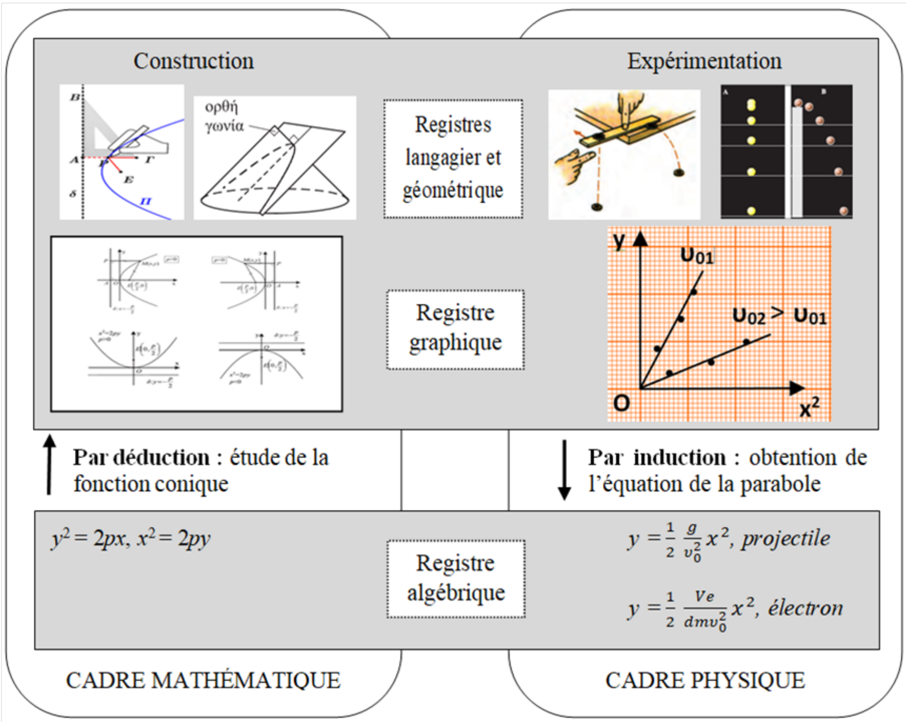


Figure 9. – Discontinuités des registres dans les deux cadres épistémologiques

La comparaison des registres de représentation mobilisés dans les cadres mathématique et physique permet aussi de relever des points de rapprochements entre les deux disciplines, ce qui est discuté ci-dessous.

Pistes pour une approche interdidactique

Nous proposons un éventail d'activités réalisables au sein de l'enseignement de la physique pouvant servir d'appui à un enseignement orienté vers la perspective d'une approche interdidactique.

6. L'image équerre-crayon est issue du manuel chypriote (Βολακάκη *et al*., 2019, p. 75). Cet emprunt est justifié par l'usage des manuels chypriotes, en tant que ressources pédagogiques au gré des enseignants grecs.

Interconnexions à partir des registres sémiotiques

Il est possible de mettre en évidence les points de rencontre de certains registres sémiotiques pour enrichir le rapprochement entre les usages de la parabole au sein des deux enseignements.

- Le registre de la langue naturelle assure des connections verbales autour de l'introduction et du traitement du concept, sous condition que le terme « parabole » soit explicitement exprimé par un enseignant de physique qui se sent compétent même en mathématiques ;
- Le registre géométrique relie la parabole comme lieu géométrique avec le corollaire physique que tout corps lancé dans un champ de forces uniforme, à une vitesse vectorielle oblique à la direction du champ, décrit nécessairement un mouvement parabolique ;
- Le registre graphique offre une visualisation en deux dimensions spatiales (x, y) de la trajectoire parabolique des corps (projectile, électron…) ;
- Le registre algébrique permet i) d'établir la loi selon laquelle le quotient $\frac{y^2}{x}$ (*cf.* fig. 3) ou $\frac{x^2}{y}$ (*cf.* fig. 4) et ii) d'interpréter le sens physique du paramètre p, présent dans l'écriture des fonctions numériques (*cf.* § Interconnexions à travers le balisage de la trajectoire).

Interconnexions au moyen d'un changement de repère

En mathématiques, les élèves travaillent uniquement avec des paraboles ayant pour sommet l'origine d'un repère cartésien à base directe, sans anticiper d'autres cas. Mais, dans les modélisations des situations physiques, nous optons, assez souvent, pour un repère le plus commode, notamment celui de la figure 4, avec le demi-axe positif Oy orienté vers la pesanteur g (« repère physique »), pour que les élèves simulent au mieux le mouvement réel. Pour encourager l'apprentissage interdisciplinaire, le professeur peut inciter les élèves à observer le mouvement, non pas directement, mais par l'intermédiaire d'un miroir placé au sol. Dans ce cas, ils seraient amenés à comprendre que le repère de la figure 3a ait bien adéquat à la situation (fig. 10).

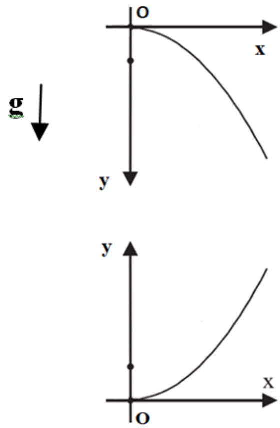


Figure 10. – Par retournement vertical du « repère physique » nous retrouvons le « repère mathématique » (fig. 3a)

Un autre exemple de choix de repère est fourni par le manuel chypriote de physique de 1re S (Αρχοντής *et al*. 2017, p. 40). Dans la figure 11, les axes conservent leur sens direct, alors que le sommet de la parabole est fixé au point de lancement du corps, *A(0, h)*. En d'autres termes, les auteurs envisagent une parabole dont le sommet n'est pas situé à l'origine du repère.

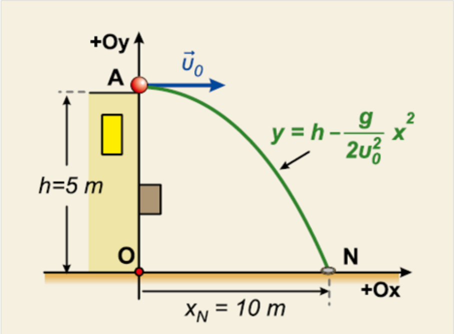


Figure 11. – Un autre choix didactique pour l'origine O et le sens des axes considérés

Comme il est remarqué dans cette figure, l'équation de la trajectoire subit une transformation par rapport à la formule (1) citée plus haut. Avec un changement de variable, la nouvelle équation pour la parabole de la figure 11 est :

$$y = h - \frac{g}{2{v_0}^2} x^2 \Rightarrow y - h = -\frac{g}{2{v_0}^2} x^2$$

et si l'on pose y - h = Y et x = X,

alors $X^2 = -\dfrac{2{v_0}^2}{g} Y$

Cette dernière écriture a la forme de la formule de la fonction parabolique, $x^2 = 2py$ (fig. 3b). À propos de la signification sémantique des nouvelles coordonnées X et Y survient une discontinuité du point de vue de l'interrelation mathématiques–physique. En effet, l'enseignement de physique effectué ne donne pas à comprendre que (X,Y) désigne un point C sur un autre repère, XO′Y, dont les axes sont déplacés parallèlement aux axes du premier repère xOy. De plus, le fait que le point C appartienne à une autre parabole centrée à l'origine $O'(x, y - h)$ n'est pas explicite.

De la part de la physique, faire le choix du repère indiqué dans la figure 11, *i.e.* point de départ de la parabole en $A(0, h)$, rend plus facile le calcul de la portée S du corps S = $|x|$. Tout simplement, il suffit de poser $y = 0$, donc

$$0 = h - \frac{g}{2{v_0}^2}x^2 \text{ d'où } x = \pm v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La double solution est un élément délicat, qui interpelle l'élève tant au plan physique qu'au plan mathématique. Plus exactement, le traitement algébrique donne les deux positions possibles (symétriques) du corps sur le sol, en fonction du sens du vecteur vitesse initiale. En revanche, dans cette situation physique, avec un sens positif du vecteur vitesse, seule la solution positive est acceptable. Un travail de rapprochement entre les deux disciplines viserait à amener les élèves à surmonter la prise en compte de la seule demi-parabole, afin d'envisager la conique dans son intégralité.

Interconnexions à la base de la relation entre y et x^2

La relation entre la distance verticale y du projectile et le carré de sa distance horizontale x (fig. 4) peut être étudiée à l'aide de la technique photo-stroboscopique, *via* laquelle nous obtenons sur un seul cliché une séquence complète de positions du projectile en mouvement (fig. 9, cadre de rationalité de physique, en haut). Cela permet de mesurer les déplacements, à tout moment tant dans le sens horizontal que vertical. La démarche expérimentale montre que y et x^2 varient de façon proportionnelle (en choisissant un repère adéquat, de sorte que la parabole soit centrée). Notons au passage que la fonction linéaire est déjà connue aux élèves. L'expression analytique qui régit cette proportionnalité est : $y = mx^2$, le coefficient m étant la pente de la droite $y = f(x^2)$ (dans le cadre de rationalité mathématique) qui s'avère être inversement proportionnelle au carré de la vitesse initiale (dans le cadre de rationalité physique). Effectivement, si nous calculons la pente pour une valeur de vitesse initiale et si nous répétons le calcul pour d'autres valeurs de vitesse, les expériences aboutissent à conclure que $m = \frac{g}{2{v_0}^2}$ (m étant exprimé en mètres^{-1}, dans le système international d'unités S. I.). Ce corollaire est très important, puisqu'il permet d'établir un lien interdidactique entre la notion mathématique de coefficient directeur et le facteur cinématique υ_0, et ceci indépendamment du choix du repère (parabole centrée ou non centrée). Enfin, dans le graphique de la figure 9, la non linéarisation des points issus du procédé de mesurage[7] est intrinsèque à l'écart entre, d'une part, le monde qui nous entoure (d'une complexité déroutante) et, d'autre part, sa modélisation mathématique. Selon Blum (2002, cité dans Caron (2008)), la modélisation mathématique vise à expliquer et à prédire un effet du monde naturel, suivant un processus cyclique qui inclut :

- la structuration et la simplification (abstraction) d'une situation issue du monde réel ;
- la définition d'un problème précis exprimé mathématiquement par des objets, des variables pertinentes et des relations les liant ;
- le traitement mathématique du modèle pour aboutir à une solution ;
- l'interprétation et la validation des résultats.

Dans notre exemple, ignorer les variables chaotiques (moment cinétique du corps solide, effets d'aérodynamique, etc.) signifie en faire abstraction pour passer de la réalité multifactorielle à une assimilation simplifiée la modélisant.

Interconnexions à travers le balisage de la trajectoire

Revenons à la figure 8, qui permet de visualiser la superposition de six instantanés de la bombe, et qui laisse entendre que toutes ces positions se situent sur une même parabole. Par ailleurs, les deux mobiles – avion et bombe (censés être des points matériels) – se trouvent, à tout moment, sur la même verticale. Un enseignant expérimenté pourrait en tirer un élément important du savoir physique à construire : le déplacement horizontal est égal pour les deux mobiles. Effectivement, si $t_0 = 0$ est l'instant du largage de la bombe (première position à gauche, au-dessous de l'avion), les autres positions correspondent à des intervalles de temps supposés[8] égaux, au cours desquels les vitesses horizontales sont égales. De surcroit, les valeurs des déplacements verticaux de la bombe (y_i, $i = 1, 2, \dots 5$), constamment calculées à partir du point de départ, sont proportionnelles aux entiers naturels 1, 4, 9, 16 et 25. Si nous admettons, par exemple, des intervalles de temps réguliers de 1 seconde chacun entre deux positions voisines de la bombe, on obtient par l'équation $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (fig. 5, g = 10 m/s²) et la suite suivante : $y_1 = 5 \cdot 1^2$, $y_2 = 5 \cdot 2^2$, $y_3 = 5 \cdot 3^2$, $y_4 = 5 \cdot 4^2$ et $y_5 = 5 \cdot 5^2$. Et, puisque $x = v_0 t$, les déplacements y_i sont propor-

7. À cause des contraintes réelles (résistance de l'air, etc.) et d'erreurs de mesure (+), inhérentes à la démarche expérimentale, les points expérimentaux dans la figure 9 (graphique sur papier millimétré), ne sont pas strictement alignés. Grâce à la méthode des moindres carrés (ou d'autres plus empiriques), on peut tracer la droite optimale et décrire au mieux la fonction $y = f(x^2)$.

8. L'intention didactique des auteurs est, entre autres, de donner à comprendre que les projections horizontales des positions de la bombe sont équidistantes, vu que la composante horizontale de son déplacement est uniforme. D'un point de vue graphique, la figure 8 ne s'y prête pas efficacement, pensons-nous.

tionnels aux carrés des déplacements horizontaux x_i. Autrement dit, le quotient $\frac{y_i}{{x_i}^2}$ reste invariable. Ou encore, les grandeurs physiques y et x^2 varient de façon proportionnelle (graphique de la figure 9), si et seulement si nous faisons le choix de définir le point de départ comme origine du repère (fig. 12, non présente dans le manuel scolaire de physique). À partir de là, l'enseignant peut proposer l'activité suivante :

Figure 12. – Technique de jalonnement de la parabole décrite par un mobile lancé horizontalement

Les élèves travaillent par groupes afin de matérialiser le mouvement balistique et appréhender l'influence de la vitesse initiale $\upsilon 0$ du mobile. Plus précisément, ils réalisent ce montage à partir de six lattes verticales (excepté la première qui est nulle, car correspondant à l'origine O du repère) qui sont horizontalement fixées à des distances égales. Les longueurs des bâtons valent respectivement 5 cm, 20 cm, 45 cm, 80 cm, 125 cm et 180 cm. Elles sont donc dans les proportions 1, 4, 9, 16, 25, 36. Mathématiquement parlant, les extrémités des bâtons (colorées en rouge, fig. 12) signalent des points du repère dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'équation de la parabole (1), donnée plus haut.

Enfin, nous nous attachons à circonscrire l'interprétation, géométrique et physique, du paramètre p, facteur de cohésion favorisant le processus de congruence sémantique entre les deux cadres de rationalité. Géométriquement, la valeur absolue de p est associé au *latus rectum*, le segment de droite qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole. La longueur du *latus rectum* est $2|p|$. Donc, p est associé à l'ouverture de la courbe, c'est-à-dire combien elle se rapproche ou s'écarte de son axe de symétrie. Physiquement, l'ouverture de la parabole détermine la distance horizontale parcourue par le projectile quant il sera tombé de $\frac{|p|}{2}$ sur $y'y$ et, par extension, la portée S du mouvement balistique, définie comme la distance horizontale parcourue, du point de lancement au point de tombée au sol (fig. 11), $S = ON$. Successivement, la portée S dépend de la vitesse initiale v_0, qui est liée à p comme suit, en référence aux figures 4 et 5 appartenant au cadre de rationalité physique, ainsi qu'à la figure 3a (où $p > 0$) propre au cadre mathématique :

$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2}$ et $x^2 = 2py$, donc ${v_0}^2 = gp$

ou, plus généralement ${v_0}^2 = g\,|\,p\,|$

Par conséquent, plus la vitesse initiale horizontale est grande, plus la courbe s'écarte de son axe de symétrie. Plus globalement, deux corps physiques lancés simultanément d'un même point à des vitesses initiales différentes, $v_{01} < v_{02}$, décrivent des arcs de parabole de plus en plus ouverts, en fonction du carré de la vitesse initiale dans le cadre de rationalité physique ou, selon la valeur du paramètre p dans le cadre de rationalité mathématique. Il s'avère, parallèlement, que les positions des corps se situent à tout moment sur le même niveau horizontal, puisque tous deux exécutent chute libre sur l'axe vertical (fig. 13, non présente dans le manuel scolaire de physique).

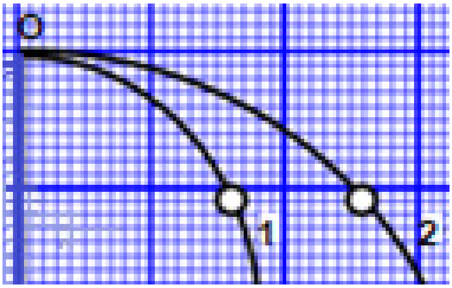


Figure 13. – Plus la vitesse initiale est grande, plus l'ouverture de la parabole est grande

Examinons, maintenant plus en détail, la dimension interdisciplinaire du paramètre p dans ce qui suit.

Interconnexions à partir de praxéologies mixtes

Nous illustrons nos réflexions didactiques relatives à l'analyse des interconnexions entre physique et mathématique à partir de praxéologies mixtes avec un exercice récurrent des cours de physique de 1re S. La méthode utilisée est issue des travaux de Malonga-Moungabio (2009) et se décline en quatre étapes :

- citer l'énoncé d'un exercice ;
- identifier le domaine de réalité extra-mathématique ;
- analyser le champ de traitement ou phase de résolution effectuée par le truchement d'un modèle mathématique ;
- critiquer le retour au champ de départ.

Voici une schématisation de cette démarche :

Cadre de rationalité intelligible	Principales étapes	
Physique	**Champ de départ** Situation de départ traduite dans un modèle de « physicien »	Retour et interprétation des résultats
Mathématiques	**Reformulation** par le truchement du concept de parabole, son équation, ses propriétés…	**Traitement mathématique** : application d'un résultat, Praxéologies

Figure 14. – Approche interdidactique entre les deux cadres de rationalité impliqués

Soit l'énoncé suivant, en référence à la figure 8 :

> L'avion qui vole horizontalement à une vitesse constante $\upsilon 0$ à une altitude de 500 m, largue (à l'instant $t_0 = 0$) une bombe pour atteindre un objectif sur le sol, dont la distance horizontale est de 400 m. Déterminer la vitesse nécessaire $\upsilon 0$ de l'appareil pour que l'attaque soit réussie ($g = 10$ m/s^2).

Imaginons deux élèves qui accomplissent cette tâche, le premier suivant une organisation praxéologique mono-disciplinaire et le second selon une organisation interdidactique mathématiques–physique. Nous considérons les deux approches tour à tour.

Résolution selon une approche mono-disciplinaire

L'élève met en place une organisation praxéologique apparemment relative à la physique, inhérente à la cinématique.

- Organisation praxéologique dans l'approche mono-disciplinaire en physique

Étant donné que la physique fait appel au formalisme mathématique pour modéliser les phénomènes, toute organisation physique relève finalement d'une organisation mathématique mixte. C'est donc selon le prisme d'un élève théorique, qui n'a pas recours au concept mathématique de parabole, que nous employons le qualificatif d'organisation physique. La cinématique du point matériel désigne le champ de départ (fig. 14). Cet élève sait que le mouvement de la bombe peut se décomposer en deux mouvements indépendants – technologie physique θ –, l'un sur l'axe $x'x$ et l'autre sur $y'y$, donc il effectue le choix des axes ci-dessous (fig. 15), suivant le cadre de rationalité de physique :

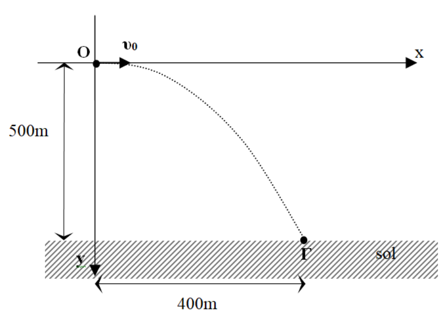


Figure 15. – Représentation de la situation physique d'après un repère indirect au repos, appartenant au référentiel du sol

Ensuite, il établit les équations horaires qui relèvent des technologies physiques dérivées, avec la fonction *x(t)*, liée au déplacement rectiligne uniforme et la fonction *y(t)*, relative à la chute libre :

$$\left.\begin{array}{r} x = v_0\, t \Rightarrow x^2 = (v_0\, t)^2 \\ y = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{array}\right\} \frac{x^2}{y} = \frac{2v_0^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{400^2}{500} = \frac{2v_0^2}{10} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 40 \text{ m/s}$$

De cette manière, il est faisable de résoudre l'exercice à l'aide de technologies issues de la physique, sans intentionnellement passer par le concept de la parabole. Bien évidemment, l'équation de cette conique est sous-entendue en tant qu'outil implicite. Le processus de congruence sémantique est manquant, d'où un risque d'échec dans la construction du sens.

- Praxéologies mises en œuvre dans l'approche mono-disciplinaire en physique

Les diverses praxéologies sont explicitées (fig. 16) au fur et à mesure du procédé mis en œuvre.

$x = v_0\, t \Rightarrow x^2 = (v_0\, t)^2$; $y = \frac{1}{2}\, g\, t^2$	$\left.\right\\}\ \frac{x^2}{y} = \frac{2v_0^2}{g} \Rightarrow$	$\frac{400^2}{500} = \frac{2v_0^2}{10} \Rightarrow v_0 = 40$ m/s
technologies θ en physique, déduites de la théorie Θ (mécanique du point matériel)	technique algébrique τ	technologies arithmétiques θ ; technologie algébrique θ

Figure 16. – Analyse praxéologique d'une résolution dans le seul cadre de rationalité physique

Résolution selon une approche interdidactique

La cinématique étant également son champ de départ, cet élève va, en premier, reformuler et traiter la situation physique dans le cadre de rationalité mathématique.

- Organisation praxéologique mixte dans l'approche interdidactique

L'élève va reformuler la situation et compte tenu de la trajectoire de la bombe ayant une concavité tournée vers le bas, il avance au choix de repères de la figure 17, afin d'être assujetti au cadre des mathématiques (fig. 3b). Il écrit $x^2 = 2py$, $p < 0$.

Certes, il sait que la position verticale y du corps est toujours négative (abscisses négatives), et que $|p|$ désigne la distance entre le foyer E et la directrice δ ou, également, la distance horizontale parcourue lorsque le corps sera tombé de $\frac{|p|}{2}$.

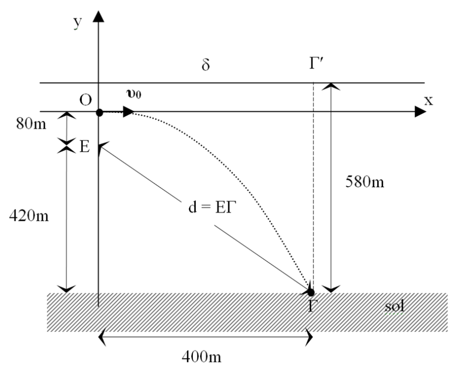


Figure 17. – Représentation de la situation physique dans un repère direct au repos, appartenant au référentiel du sol

Le point d'arrivée au sol, Γ (400;–500), vérifie l'équation $x^2 = 2py$

Ensuite, l'élève va réaliser des praxéologies mixtes :

- Praxéologies mises en œuvre dans l'approche interdidactique

Cette démarche se décline à trois parties illustrées par les figures 18, 19 et 20 :

$\left.\begin{array}{r} x^2 = 2py \\ \text{point } \Gamma\ (400\ ;\ -500) \end{array}\right\}$ $400^2 = 2p\,(-500) \quad \Rightarrow \quad p = -160$	
technologie θ en mathématiques, déduite de la théorie Θ (géométrie euclidienne)	technique algébrique τ

Figure 18. – Analyse praxéologique mixte, partie 1 ; détermination de *p*

La directrice δ admet comme équation, $y = 80$, les coordonnées du foyer étant de E(0 ; –80).

$\left.\begin{array}{r} x = v_0\, t \Rightarrow x^2 = (v_0\, t)^2 \\ y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{array}\right\}$ $\frac{x^2}{y} = -\frac{2v_0^2}{g} \quad \Rightarrow \quad 2p = -\frac{2v_0^2}{10} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \pm\, 40$			p en : $m^2\, s^{-2}$ / $m\, s^{-2}$ = m
technologies θ en physique	technique algébrique τ	technologies arithmétiques θ ; technologie algébrique θ	technologie physique θ issue de la théorie Θ (métrologie)

Figure 19. – Analyse praxéologique mixte, partie 2 : détermination de la v_0

Pour terminer son travail, l'élève réalise la dernière étape (flèche oblique) de la modélisation des praxéologies mixtes (fig. 14). Afin de retourner dans le champ de la physique et d'interpréter ces résultats, l'intérêt de l'élève est concentré sur le sens physique du paramètre *p*. Comme affiché dans la figure 19, il applique le principe d'indépendance des mouvements pour écrire les équations horaires par rapport à son propre référentiel considéré (fig. 17).

Au plan cinématique, la racine négative de la vitesse est rejetée, selon une technologie θ découlant de l'algèbre linéaire (théorie Θ, espaces vectoriels). Enfin, la grandeur *p* est égale au quotient $-\frac{{v_0}^2}{g}$ (selon le choix d'axes précédent). Elle admet donc comme unité de mesure le mètre, comme prévu puisque, $\frac{x^2}{y} = 2p$.

En tout état de cause, le paramètre mathématique *p* peut s'exprimer en termes de physique et catalyser, ainsi, le rapport à double sens entre mathématiques et physique : au plan géométrique, p détermine l'ouverture de la parabole, tandis qu'au plan cinématique, $|p|$ vaut le quotient $\frac{v_0^2}{g}$. En fait, nous retrouvons le contenu sémantique discuté plus haut.

Avec une approche interdidactique pilotée par les professeurs de physique et de mathématiques, les processus mésogénétiques permettent à l'élève d'achever, dans son apprentissage, la construction sémantique bâtie selon les étapes de la figure 14. Ces processus peuvent s'appuyer sur les apports en physique de la tangente de la parabole, à partir de la tâche suivante : déterminer la direction de la vitesse instantanée pour une position donnée du corps. Pour s'attaquer à cette tâche, il faut calculer – dans un système d'axes direct – la pente de la tangente (fig. 20).

L'équation de la tangente provenant du cadre mathématique,

$xx_1 = p(y + y_1) \Rightarrow y = \frac{x_1}{p}x - y_1$, avec $p < 0$ peut fonctionner, en physique, comme outil explicite de modélisation dont l'usage est bien justifié puisqu'il permet d'établir le lien entre l'objet physique de la vitesse instantanée et l'objet mathématique de l'inclinaison d'une droite. La pente de la droite est définie par le quotient négatif, $\frac{x_1}{p}$, comme l'indique l'équation précédence, donc : $\tan\varphi = \frac{x_1}{p}$ où ϕ est l'angle conventionnel positif (fig. 20).

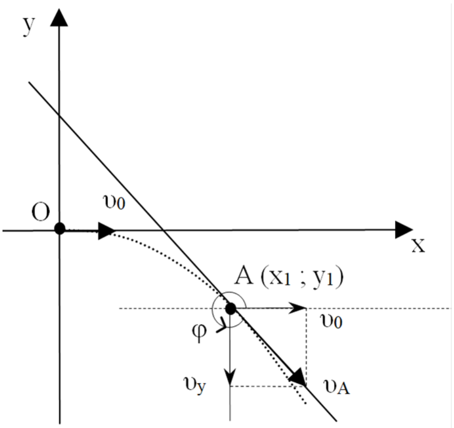


Figure 20. – Analyse praxéologique mixte, partie 3 :
tangente de la parabole en un point A et son inclinaison

D'autre part, le traitement mono-registre cinématique (appropriée à l'approche mono-disciplinaire) conduit à l'expression $\tan(2\pi - \varphi) = \frac{v_y}{v_0}$ (υ_y et υ_0 étant les valeurs absolues des deux composantes du vecteur vitesse υ_A). Notons au passage qu'en physique, on calcule la tangente de l'angle aigu entre les vecteurs de la composante horizontale υ0 et de la vitesse résultante υ_A à la position considérée. L'opposé de ce résultat donne la pente, selon la technologie trigonométrique θ, qui régit les fonctions trigonométriques d'un angle. Or, pour le premier élève, qui n'établit pas d'allers-retours entre les deux cadres de rationalité, la discontinuité didactique est criante. Au contraire, la formule $\tan\varphi = \frac{x_1}{p}$ issue du cadre de rationalité des mathématiques, donne après traitement :

$$\tan\varphi = \frac{v_0 t}{-\frac{{v_0}^2}{g}} = -\frac{gt}{v_0} = -\frac{v_y}{v_0}$$

Comme attendu, les deux angles, ϕ et 2π - φ, ont des tangentes opposées.

Conclusion

La recherche que nous avons menée à propos des rapprochements entre les mathématiques et la physique s'inscrit dans les travaux relatifs à l'étude interdidactique d'un concept mathématique mis à l'épreuve en physique, dans une perspective de transfert entre les deux disciplines scolaires (Malafosse *et al.*, 2000). D'un point de vue psycho-cognitiviste et didactique, la capacité ou l'habileté à mobiliser et réactiver un « déjà-là » dans une nouvelle situation se développe opérationnellement chez l'apprenant par le transfert d'un apprentissage (Samson, 2004). Malonga-Moungabio (2009) souligne que la relation à double sens entre les mathématiques et la physique relève de la continuité didactique et est censée aider à la compréhension d'une notion scientifique au moyen de l'enseignement des disciplines scientifiques, entre lesquelles des liens concrets sont établis.

L'objectif assigné à cet article est de mettre en évidence les discontinuités didactiques manifestées dans le cadre de l'éducation scientifique au lycée grec, lors des transferts de concepts mathématiques en classe des sciences. Nous avons étudié ces discontinuités à partir de l'objet « parabole » qui peut, en principe, revêtir le statut d'outil dans l'étude du mouvement balistique en physique. Mais la chronologie de ce cours de physique précède l'enseignement des coniques, en mathématiques. Par l'analyse didactique et épistémologique des manuels scolaires des deux disciplines, nous avons pu constater un effet de cloisonnement disciplinaire qui consiste en une sorte de discontinuité entre le traitement du concept dans les deux enseignements. Cette disharmonie résulte de contraintes institutionnelles pesant sur la situation des professeurs qui en sont autant victimes qu'acteurs. Pour en éclairer les causes, nous avons fait l'hypothèse que la façon dont la parabole émerge en physique fonctionne comme la raison d'être (Chevallard, 2000) d'une introduction ultérieure du concept, en mathématiques. Cette hypothèse semble se réitérer pour bien d'autres occurrences de transfert de concepts mathématiques, toujours d'une manière discontinue : le concept de vecteur (de vitesse, en cinématique, de force, en dynamique, etc.) et les opérations vectorielles, le cercle trigonométrique, les notions de limite et de dérivée (vitesse instantanée, accélération, etc.), l'hyperbole, le logarithme. Par exemple, le travail d'un processus thermodynamique isotherme, $W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$, est étudié en physique en 1re S. Dans cette formule, le logarithme népérien du quotient des volumes initial et final du gaz parfait est introduit en physique, tandis que l'étude des fonctions exponentielle et logarithmique est présenté plus tard en mathématiques. De façon identique, les concepts cinématiques de vitesse instantanée et d'accélération sont introduits, dans le manuel de physique de seconde, de manière plutôt empirique sans servir à l'étude des notions mathématiques associées (limite, différentielle, dérivée, inclinaison). Plus loin, le même manuel fournit l'expression $W = Fx\cos\varphi$, pour le travail d'une force constante, sans pour autant amener le concept de produit scalaire (ici, entre le vecteur force et le vecteur déplacement). En revanche, l'enseignement du concept physique de moment cinétique n'a lieu qu'après l'étude, en mathématiques, du produit vectoriel. Dans la plupart des cas, les objets mathématiques sous-jacents en physique ne servent pas de raisons d'être à l'enseignement des mathématiques qui se limite, d'ailleurs, à l'aspect purement mathématique. Dans le contexte grec, les enseignants des différentes disciplines s'ignorent plutôt qu'ils ne collaborent, ce qui empêche de systématiser le savoir (épars et compartimenté) en faveur d'un apprentissage cohérent des élèves. Par conséquent, si notre hypothèse de départ est valable, nous nous interrogeons sur les attentes de l'institution, vis-à-vis de l'enseignant de physique, à l'égard du traitement de la parabole comme raison d'être. L'analyse des cas précédents mériterait le développement, à part entière, d'un programme de recherches en termes de modélisation selon le schéma de la figure 14 en lien avec l'analyse des praxéologies inhérentes à chacun des concepts mathématiques transférables aux disciplines scientifiques.

Nous avons exposé les répercussions de l'autarcie disciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage, en termes de discontinuités didactiques, à l'aide des cadres de rationalité propres aux deux disciplines. Malafosse & Lerouge (2001) ont sonné l'alarme sur la coexistence, chez l'élève, d'éléments de savoir disparates, voire concurrents, vis-à-vis d'un concept utilisé dans plusieurs disciplines :

> Il y a donc rupture entre les règles de traitement de registres utilisés dans des disciplines différentes, ce qui constitue la source de difficultés d'élèves contraints de réaliser des traitements avec deux jeux de règles incompatibles, voire contradictoires. (2001, p. 127).

Pour surmonter les difficultés identifiées, nous avons montré à partir de l'exemple de la parabole, comment l'approche interdidactique joue sur les statuts d'objet et d'outil du concept et peut contribuer à établir des liens pour son apprentissage. Enfin, un développement de cette problématique pourrait consister en la conception et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique dont nous avons esquissé les traits au long de cet article. Plus précisément, il s'agirait de réfléchir aux types de tâches de transition les plus féconds pour dynamiser le processus de congruence sémantique, entre les mathématiques et la physique, et soutenir la construction du sens à propos de la parabole.

Bibliographie

Caron, F. (2008). Pour une réelle intégration de la modélisation mathématique au secondaire. Dans A. Hasni & J. Lebeaume (dirs), *Interdisciplinarité et enseignement scientifique et technologique*, Éditions du CRP, 131-145.

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. *Skholê*, 7, 45-64.

Chevallard, Y. (2000). Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale. Actes du colloque *Mathématiques sans frontières 2000*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=56

Chevallard, Y. & Wozniak, F. (2003). Enseigner la statistique : des mathématiques mixtes pour penser la variabilité. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=59

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères – IREM, 6,* 132-158.

Douady, R. (1993). Enseignement de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres en formation mathématique des professeurs d'école. Dans, *Concertum Dix ans de formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques. Tome 3 – Outils de formation*, 189-200.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Issa, J.S. (2019). L*es coniques dans l'enseignement secondaire au Liban: conceptions et difficultés*. [Thèse de doctorat, Université Libanaise]. https://www.academia.edu/43104790/Thèse_de_doctorat_Jocelyne_Samir_ISSA

Journal officiel du gouvernement grec. (2006). *Affectation de l'enseignement des disciplines aux enseignants de collège et de lycée*. Ministère d'éducation nationale grec.

Lerouge, A. (1992). *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez des élèves de collège.* [Thèse de doctorat, Université Montpellier 2]. http://www.theses.fr/1992MON20019

Malafosse, D. & Lerouge, A. (2000). Ruptures et continuités entre physique et mathématique à propos de la caractéristique des dipôles électriques linéaires. *Aster*, *30*, 65-85.

Malafosse, D. & Lerouge, A. (2001). D'une recherche inter-didactique mathématiques / physique à un projet de formation initiale des professeurs de collèges et lycées. *Aster*, *32*, 123-145.

Malafosse, D., Lerouge, A. & Dusseau, J.M. (2000). Étude, en inter-didactique des mathématiques et de la physique, de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité. *Didaskalia*, *16*, 81-106.

Malafosse, D., Lerouge, A. & Dusseau, J.M. (2001). Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité. *Didaskalia*, *18*, 61-98.

Malonga-Moungabio, F. (2006). *L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques-physique dans l'enseignement secondaire français*. Actes du colloque EMF L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. http://emf.unige.ch/emf-2006/g/

Malonga-Moungabio, F. (2009). Les équations différentielles à l'interface mathématiques – physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S. *Recherches en didactique des mathématiques, 29*(3), 335-357.

Ministère d'éducation nationale grec (MÉNG). (2011). Programmes des mathématiques. http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf

Ministère d'éducation nationale grec (MÉNG). (2015). Programmes de physique. Bulletin nº 184.

Ministère d'éducation nationale grec (MÉNG). (2021). Matière à enseigner et guide d'enseignement des mathématiques de la première scientifique. https://drive.google.com/file/d/10IVWxJuDj1erkBXIaS3bjjfxXHMVYCmv/view

Perrenoud, P. (1993). Curriculum : le formel, le réel, le cachée. Dans J. Houssaye (dir.), *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, ESF, 61-76.

Samson, G. (2004). *Le transfert de connaissances entre les mathématiques et les sciences. Une étude exploratoire auprès d'élèves de 4e secondaire*. [Thèse de doctorat, Université du Québec]. https://constellation.uqac.ca/684/

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrier et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy & A. Mercier (dirs), A*gir ensemble*. L'*action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Presses universitaires de Rennes, 13-49.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(3), 263-304.

Tiberghien, A. (2011). Conception et analyse de ressources d'enseignement : le cas des démarches d'investigation. Dans M. Grangeat (dir.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique*, École normale supérieure de Lyon, 185-212.

Manuels scolaires grecs / chypriotes

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ, Λ., ΒΙΣΚΑΔΟΥΡΑΚΗΣ, Β., ΓΑΒΑΛΑΣ, Δ., ΠΟΛΙΖΟΣ, Γ. & ΣΒΕΡΚΟΣ, Α. (2012). *Μαθηματικά ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών Β' Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

ΑΡΧΟΝΤΗΣ, Γ., ΠΤΩΧΟΣ, Φ., ΤΟΥΜΠΑΣ, Ν., ΖΑΧΑΡΙΑ, Ζ., ΙΩΑΝΝΟΥ, Μ., ΚΑΡΜΙΩΤΗΣ, Ι., ΠΟΛΥΔΩΡΙΔΗΣ, Σ., ΦΙΛΙΠΠΟΥ, Δ., ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ, Π. & ΧΑΤΖΗΚΩΣΤΗΣ, Γ. (2017). *Φυσική Β' Λυκείου Προσανατολισμού. Μέρος Α' Μηχανική*. Λευκωσία: Υπουργείο παιδείας και πολιτισμού. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

ΒΛΑΧΟΣ, Ι., ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΚΗΣ, Ι., ΙΩΑΝΝΟΥ, Α., ΚΑΡΑΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, Β., ΚΟΚΚΟΤΑΣ, Π., ΝΤΑΝΟΣ, Γ., ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ, Π., ΠΗΤΤΑΣ, Α., ΡΑΠΤΗΣ, Σ. & ΤΙΜΟΘΕΟΥ, Γ. (2013). *Φυσική ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών Β' Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

ΒΟΛΑΚΑΚΗ, Μ., ΚΟΝΤΟΒΟΥΡΚΗΣ, Μ., ΚΥΡΙΑΚΟΥ, Κ., ΛΟΪΖΙΑΣ, Σ., ΜΑΤΘΑΙΟΥ, Κ., ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΗΣ, Κ., ΣΑΛΟΝΙΚΙΔΗΣ, Ι., ΣΕΡΓΙΔΗΣ, Μ. & ΤΙΜΟΘΕΟΥ, Σ. (2019). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης. Τεύχος Γ'*. Λευκωσία: Υπουργείο παιδείας και πολιτισμού. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.