Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique

Alain Kuzniak
Laboratoire de didactique André Revuz, Université de Paris

Dans une première partie du texte, nous considérons les raisons de l'intérêt porté à la modélisation mathématique et l'approche des mathématiques enseignées qui en résulte. Pour cette étude, nous privilégierons les approches menées autour du cycle de modélisation associé aux théories nord-européennes sur la modélisation dans l'enseignement en relation avec un enseignement par compétences. Nous reviendrons également sur notre expérience d'un enseignement de la modélisation dans le cadre du master de didactique de l'université Paris-Diderot à partir des années 2000. En insistant sur la place de la mathématisation et sur le rôle des modèles, nous questionnerons et discuterons la réalité du travail mathématique ainsi développé par les enseignants et les élèves. Dans la seconde partie du cours, nous reprendrons la thématique de la mathématisation horizontale et du chaînage des modèles introduite dans le cadre de la *Realistic Mathematics Education*. Puis, en nous appuyant sur la théorie des espaces de travail mathématique (ETM), nous montrerons comment nous concevons l'articulation entre activité de modélisation et formation du travail mathématique. Les recherches récentes, menées dans ce cadre, sont centrées sur la mathématisation, les jeux entre modèles alternatifs et la connexion entre ETM. Elles intègrent un double regard, cognitif et épistémologique, sur les activités de modélisation. Cette seconde partie sera illustrée, approfondie et discutée dans l'atelier associé au cours.

Mots-clés : cycles de modélisation ; mathématisation ; modélisation ; travail mathématique

The teaching of mathematical modelling and the mathematical work: A dynamic that is problematic

The first part of the course considers the reasons for the interest in mathematical modelling and the resulting approach to teaching mathematics. The study focuses on approaches based on the modelling cycle associated with Northern European theories on modelling in education in relation to competency-based teaching. Additionally, the text reflects on our experience of teaching modelling as part of the master's degree in didactics at the University of Paris-Diderot since 2000. By emphasising the role of mathematisation and models, we question and discuss the reality of the mathematical work developed by teachers and students in this manner. In the second part of the course, we deal with the theme of horizontal mathematisation and the chaining of models introduced in the context of *Realistic*

Kuzniak, A. (2024). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Numéro spécial. *Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques*, 91-110, https://doi.org/10.46298/rdm.12907

Mathematics Education. Drawing on the theory of *Mathematical Work Spaces* (MWS), we then show how we consider the link between modelling activity and the training of mathematical work. Recent research in this area focused on mathematisation, the interplay between alternative models, and the connection between MWSs. The dual cognitive and epistemological approach to modelling activities is adopted. This aspect is illustrated, explored, and discussed in the workshop associated with the course.

Keywords: mathematical work, mathematisation, modelling, modelling cycles

La enseñanza de la modelización matemática y el trabajo matemático: una dinámica problemática

En la primera parte del curso se examinan las razones del interés por la modelización matemática y el enfoque que resulta para la enseñanza de las matemáticas. El estudio se centra en los enfoques basados en el ciclo de modelización asociados a las teorías del norte de Europa sobre la modelización en la educación en relación con la enseñanza basada en competencias. Además, reflexionamos sobre nuestra experiencia de enseñanza de la modelización en el marco del máster de didáctica de la Universidad de París-Diderot desde el año 2000. Al hacer hincapié en el papel de la matematización y de los modelos, cuestionamos y discutimos la realidad del trabajo matemático desarrollado de esta manera por profesores y alumnos. En la segunda parte del curso, abordamos el tema de la matematización horizontal y del encadenamiento de modelos introducidos en el contexto de la *Educación Matemática Realista*. Con el uso de la teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM), mostramos a continuación cómo concebimos el vínculo entre la actividad de modelización y la formación del trabajo matemático. Las investigaciones recientes en este ámbito se centran en la matematización, la interacción entre modelos alternativos y la conexión entre los ETM. Se adopta el doble punto de vista cognitivo y epistemológico sobre las actividades de modelización. Esta persperctiva se ilustra, explora y discute en el taller asociado al curso.

Palabras clave: ciclos de modelización; matematización; modelización; trabajo matemático

1. Modélisation, mathématisation et modèles

Un grand nombre de recherches en *mathematics education* (Shukaljow *et al.*, 2018) s'intéressent à la modélisation et à son enseignement dans le cadre des mathématiques. Ces recherches mettent en jeu des notions comme celles de mathématisation ou de modèle dont le sens et l'emploi en relation avec la modélisation ne font pas l'objet d'un consensus. De fait, ces termes renvoient à des conceptions épistémologiques et didactiques parfois fort différentes. Dans cette première partie, nous précisons les relations possibles au sein de la triade : modèle, mathématisation et modélisation.

Les mathématiques ont acquis une position particulière du fait qu'elles permettent d'aller au-delà des mots pour décrire, comprendre et anticiper certains phénomènes du monde réel. Initialement consacrées à la mécanique et à la physique, les applications des mathématiques sont aujourd'hui multiples et concernent tous les domaines scientifiques et même au-delà, comme l'économie ou les sciences humaines. Ce processus de *mathématisation* du réel est décrit par Israel (1996, p. 9) comme « l'invasion des mathématiques dans les processus de description et d'analyse du monde comme dans les techniques d'intervention active sur lui ».

L'étonnante et *déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles*[1] (Wigner, 1960) s'appuie sur l'idée de modèle et plus précisément de modèle mathématique. Il est difficile de définir la notion de modèle et les auteurs qui ont abordé le sujet préfèrent généralement recourir à des exemples plutôt que de s'essayer à des définitions générales et complètes. Celles-ci, comme le souligne Israel (1996), sont systématiquement mises en défaut. Une exception importante est celle de la logique mathématique où existe une théorie des modèles qui définit les modèles en référence à des langages formels. Naturellement, sa compréhension profonde nécessite un certain nombre de définitions ainsi qu'une familiarité certaine avec la logique mathématique. Mais guidé par Wagner (2002), essayons d'en saisir l'idée et le lien avec notre questionnement.

Wagner commence par donner une première définition qui laisse entrevoir l'idée de modèle :

> Étant donné une formule F écrite dans un langage (formel) L, on dira que certaines interprétations du langage L sont des modèles de la formule F. (Wagner, 2002, p. 8)

Pour avancer et aider à préciser cette définition, il nous livre ensuite les définitions de ce qu'est un langage formel pour l'arithmétique avec (1) un ensemble de signes qui constituent un alphabet formel puis (2) un ensemble de règles de constitution de formules. Il est ensuite possible de définir un langage formel associé à un système formel. Pour cela, en plus de (1) et (2), on doit définir un ensemble de formules appelées axiomes (3) et un ensemble de règles d'inférence (4) qui permettent d'inférer une formule à partir d'une ou plusieurs formules. Il est ainsi possible de parler de démonstration formelle d'une formule (un théorème). Cette partie purement formelle est ensuite reliée aux mathématiques grâce à la notion d'interprétation d'un langage qui permet de donner une valeur de vérité à une formule et à un théorème. Wagner peut alors énoncer cette définition d'un modèle :

> Les modèles d'une formule sont les interprétations qui la rendent vraie.

[1] Prix Nobel de physique, Wigner s'intéresse à l'impact des théories mathématiques les plus abstraites qui se sont développées indépendamment de toute relation au monde réel.

Un peu plus loin, il distingue la caractéristique sémantique des modèles par rapport aux aspects syntaxique des formules :

> La théorie des modèles articule les aspects sémantiques liés à l'interprétation ou à la signification du langage formel et la syntaxe liée à la structure formelle.
>
> De là, on peut passer aux théories, une théorie T sera un ensemble de formules d'un langage formel L et un modèle de la théorie sera une interprétation de L qui rend vraie toutes les formules de T. (Wagner, p. 18).

Cette approche logique permet d'identifier les modèles mathématiques à des interprétations d'ensemble de formules et de théories formelles. De cette approche basée sur la logique, on peut retenir que les modèles sont des fragments des théories auxquelles ils sont adossés. Les différents éléments constitutifs des modèles reposent sur des définitions et des propriétés qui peuvent être prouvées grâce à un étayage axiomatique et déductif.

Tout modèle suppose des interprétations[2] qui donnent un sens à des constructions abstraites. Ces interprétations (géométriques, arithmétiques, etc.) peuvent être envisagées du seul point de vue des mathématiques, mais il est aussi possible de les relier à d'autres domaines de réalité, empiriques mais aussi physiques, biologiques, etc. D'un point de vue épistémologique, le modèle n'est plus un objet interne à la théorie comme en logique mais un outil hybride et interdisciplinaire qui permet de décrire l'activité scientifique.

La mathématisation peut être considérée comme l'acte de produire et d'étudier des modèles mathématiques. Israel estime que lorsqu'elle s'applique au réel, on peut confondre la mathématisation avec la modélisation mathématique. Dans ce cas, « un modèle est un fragment de théorie appliqué à un fragment de réalité » (Israel, p. 11). Dans cette approche, la dynamique entre modèle et théorie diffère de l'approche logique : le fragment de réalité existe et doit être identifié en relation avec le développement ou l'application d'un fragment de théorie.

Dans le cadre de l'éducation, les trois termes (modèle, modélisation, mathématisation) peuvent avoir des sens et des emplois différents en fonction des approches didactiques, pédagogiques ou théoriques qui les utilisent. Il est important de prendre en compte cette diversité polysémique en étant attentif aux divers usages qui en sont faits et qui renvoient pour partie à des conceptions différentes de ce que sont les mathématiques et leur enseignement.

Dans le cadre particulier de l'enseignement des mathématiques, comment comprendre les interactions entre modélisation et mathématiques ? La modélisation mathématique est-elle tout le chemin ou une partie du chemin qui va du monde réel à ses applications ? Parler d'application, n'est-ce pas avoir une vision trop restrictive du lien entre les mathématiques et le monde réel à travers d'autres disciplines qui contribuent à l'étude de cette réalité ?

Pour avancer sur toutes ces questions, notre cours s'intéressera tout d'abord aux origines de l'engouement pour l'enseignement de la modélisation mathématique. Puis, nous décrirons l'approche que nous désignons sous le terme d'approche standard qui s'est progressivement imposée tant en recherche que dans l'enseignement. Enfin, nous considérerons deux approches alternatives qui peuvent être vues comme

[2] Nous utilisons le mot interprétation dans un sens commun et non dans sa signification en logique mathématique.

complémentaires : la *Realistic Mathematics Education* (RME) et la théorie des espaces de travail mathématique (ETM).

2. Aux origines de l'intérêt pour l'enseignement de la modélisation

Si l'on s'en tient à l'enseignement dans les pays occidentaux naviguant dans l'orbite anglo-saxonne, la question de la modélisation a commencé à être posée aux débuts des années soixante[3]. La coïncidence avec la révolution des mathématiques modernes n'est pas fortuite puisque, dans les deux cas, c'est l'inadaptation de l'enseignement des mathématiques tant pures qu'appliquées qui est mise en avant. On attribue cette prise de conscience à l'avancée technologique et scientifique de l'Union Soviétique (U.R.S.S.) dans certains domaines à fort enjeu militaire. En 1961, the American Society for Industrial and Applied Mathematics organise un séminaire sur cette question "*Applied Mathematics : What is needed in research and education?*" en invitant des mathématiciens (comme Courant et Rosenbloom) et des industriels de grand renom.

Ces derniers doivent répondre à la question suivante :

> Pourquoi dans le monde du travail, les mathématiciens qui sont recrutés ont-ils autant de mal à comprendre les demandes qui leur sont faites et autant de mal à se faire comprendre quand ils produisent des résultats ?

De ce séminaire ressortent quelques idées fortes que l'on va retrouver tout au long de notre exposé.

Ainsi, Rosenbloom (Clements, 1989) souligne le fait que les mathématiques appliquées sont un art dont les mathématiques ne sont qu'une partie. Il propose ensuite une présentation du processus global autour de la modélisation et donne un découpage que nous allons retrouver dans la suite sous différentes formes.

> We have a situation in the real world from which you have to create a mathematical model by idealisation and simplification.
> We then study the mathematical model using all the power and techniques of mathematics on that.
> Then the test of our model is whether, when you interpret it back to reality, it works.
> And the middle part, the study of this mathematical model, which is the game of the mathematician, is only part of the whole process of applied mathematics. (Rosenbloom, cité par Clements, 1999, p. 7)

La différence entre les raisonnements rigoureux des mathématiciens et ceux plus heuristiques des ingénieurs est également mise en avant.

Tous les participants soulignent la nécessité de revoir l'enseignement au niveau des universités et des écoles spécialisées pour les ingénieurs. L'idée est de faire découvrir et comprendre le processus de modélisation aux étudiants. Il s'agit aussi de former les professeurs pour qu'ils développent une nouvelle approche de leur enseignement.

Il faut noter que la réflexion sur cet enseignement est menée par des chercheurs engagés dans le monde industriel et l'ingénierie. Ceci explique que le mouvement qui émerge alors pour un enseignement de la modélisation est orienté vers l'enseignement supérieur et prend essentiellement ses exemples dans le monde de l'industrie. Il est avant tout conçu pour la formation des ingénieurs.

[3] Pour un autre regard sur l'enseignement des mathématiques, voir le numéro 53(7) de ZDM (2021) sur *Mathematics education in Eastern Europe: changes and developments in recent decades*.

Pour avancer vers une mise en œuvre didactique d'une discipline nouvelle, la discussion porte alors sur une *methodology of modelling*. Celle-ci doit décrire le processus mis en œuvre lors d'une modélisation. Ainsi, Klamkin (1971) propose une première méthodologie en cinq étapes, inspirée de Pollack[4] : 1. Reconnaissance ; 2. Formulation ; 3. Solution ; 4. Calcul ; 5. Explication.

Cette description est critiquée pour ne rendre compte finalement que de la partie purement mathématique du travail de modélisation. Par ailleurs, le processus décrit par Klamkin est jugé trop linéaire et il ne prend pas en compte des allers et retours pour chaque étape.

D'autres chercheurs soulignent le fait qu'il n'y a pas un seul modèle qui convienne dans une modélisation mais que plusieurs modèles cohabitent : chacun ayant sa propre utilité. Nous verrons que cette pluralité des modèles a eu tendance à être oubliée par la suite et qu'elle est à la base de l'approche développée dans le cadre des ETM, notamment par Lagrange avec l'idée des espaces de travail mathématique connectés.

Dès la fin des années 60, un consensus semble s'établir pour considérer trois phases bien distinctes pour décrire la modélisation :

1. Description et formulation d'un modèle idéalisé en langage mathématique.
2. Solution du problème mathématique et déduction de résultats susceptibles de vérification expérimentale
3. Comparaison des observations et de la théorie pour arriver à une évaluation de la validité du modèle.

Au cours des années 70, ces idées sont mises en pratique et débouchent sur des descriptions plus complexes qui tentent de s'approcher au mieux du processus de modélisation pour en faciliter l'enseignement. Le plus fameux par la postérité qu'il a laissé dans l'enseignement est celui de Penrose (1978) :

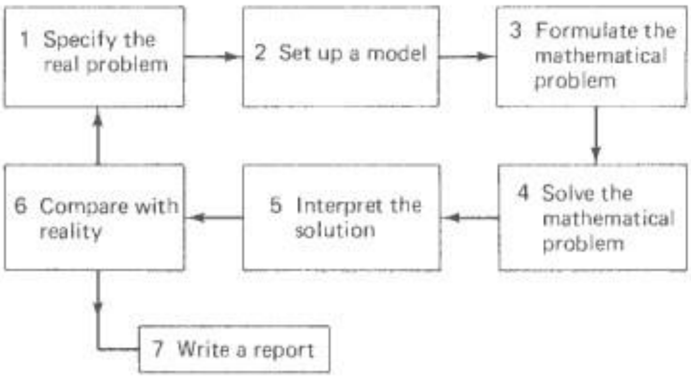


Figure 1. – The modelling methodology (Penrose, 1978)

Deux points sont mis en avant dans cette méthodologie. Le premier porte sur le fait qu'il faut faire un travail de défrichage du problème pour le spécifier à partir d'une réalité complexe et non mathématique (étapes 1, 2 et 3). Le deuxième w*rite a report* (étape 7) souligne que l'acte de modélisation n'est pas

[4] Pollack occupe une place importante dans ce mouvement d'intégration de la modélisation dans l'enseignement (voir Niss *et al.*, 2004, p. 109-120).

gratuit : il doit produire un résultat à l'issue d'un travail et ce résultat doit pouvoir être communiqué à des non mathématiciens pour être ensuite utilisé par ces derniers.

Dans le même temps, et influencé par la théorie des systèmes (von Bertalanffy, 1968), Clements (1989) développe une approche pour l'enseignement inspirée de la Soft System Methodology de Checkland (1981). Son cours, destiné aux futurs ingénieurs, est basé sur des études de cas réels issus du monde du travail dans lequel ses étudiants devront plus tard s'insérer. La méthodologie qu'il propose est complexe et ne prétend pas forcément guider pas à pas le cheminement de l'étudiant mais plutôt l'aider à comprendre la globalité de son travail.

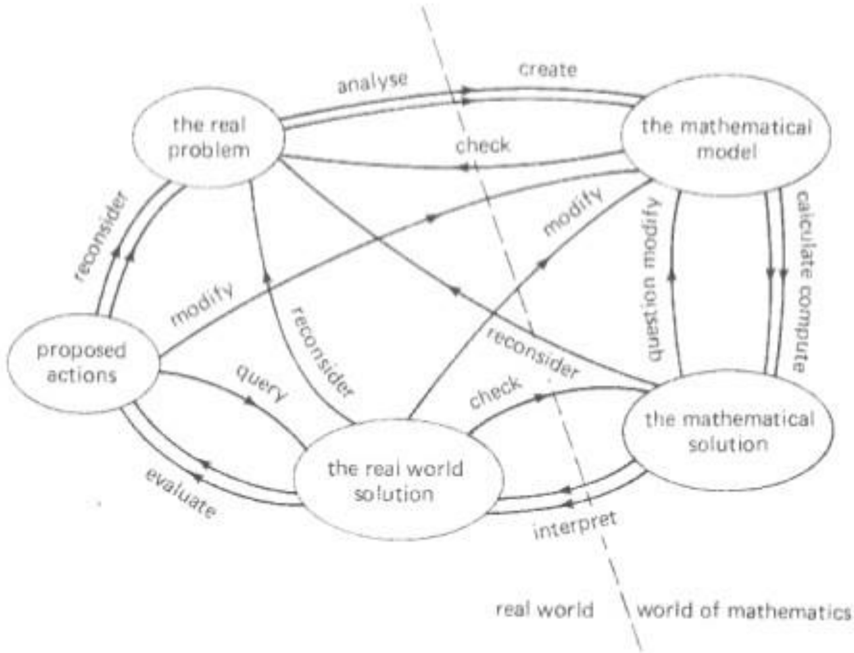


Figure 2. – Une approche systémique de la modélisation mathématiques (Clements, 1989)

Une des particularités de cette méthodologie est de faire apparaître une ligne de démarcation entre le monde réel et le monde des mathématiques. Cette distinction servira de fondement à la conception de l'enseignement de la modélisation développé dans l'enseignement secondaire à parti des années 80.

3. Enseigner la modélisation dans l'enseignement secondaire : l'approche standard et dominante

À partir des années 1980, l'enseignement de la modélisation ne concerne plus les seuls ingénieurs mais il sert de base à une rénovation de l'enseignement des mathématiques qui cherche à donner plus de sens aux notions mathématiques introduites dans les cours de mathématiques. Il s'agit de problématiser ces notions en recherchant des problèmes où elles interviennent pour apporter des solutions.

Dans cette partie, nous allons décrire l'approche qui s'est progressivement imposée en Europe, et plus largement dans les pays à économie libérale, et qui s'appuie sur la notion de compétence. Cette approche est parfaitement décrite dans l'introduction de la quatorzième étude ICMI dirigée par Niss de 2002 à 2004 (Niss *et al.*, 2007). Les auteurs soulignent la relation entre le monde réel et les mathématiques comme un des enjeux fondamentaux de la *mathematical literacy* du citoyen. Cette dernière fait l'objet des évaluations du programme PISA développé et soutenu par l'OCDE.

3.1. Monde réel et mathématiques

La distinction entre le monde réel et celui des mathématiques est à la base de l'approche suivie pour la mise en place de la compétence de modélisation. La relation entre les deux est vue comme une application des mathématiques vers un autre monde (*extra-mathematical world*) qui peut être un autre sujet, une autre discipline, un domaine de pratique ou de vie sociale ou privée, etc. (Niss *et al.*, 2007, p. 3).

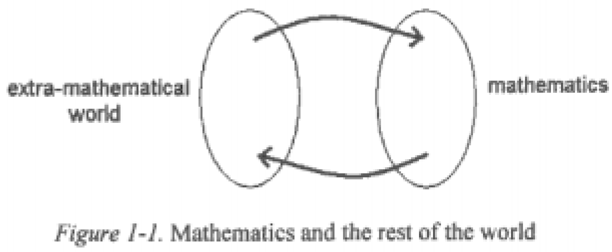


Figure 3. – Mathématiques et le reste du monde (Niss *et al.*, 2007, p. 4)

Dans chaque application des mathématiques, un modèle mathématique est impliqué de manière plus ou moins explicite :

> A mathematical model consists of the extra-mathematical domain D, of interest, some mathematical domain M, and a mapping from the extra-mathematical world to the mathematical domain.

Le domaine mathématique M permet de progresser dans la résolution des questions posées et ces réponses sont ensuite *translated* dans le domaine D et interprétés dans ce domaine. La modélisation réfère à l'ensemble du processus qui peut être décrit par un *cycle de modélisation* qui pourra être parcouru plusieurs fois suivant les besoins.

L'enseignement de la modélisation peut alors être défini grâce à un certain nombre d'ingrédients que nous allons envisager dans la suite : le cycle de modélisation pour le décrire, des tâches de modélisation pour le mettre en place, la compétence de modélisation pour l'évaluer.

3.2. Le cycle de modélisation

De nombreux cycles de modélisation ont été développés pour asseoir l'enseignement de la modélisation et son évaluation. Ils s'inspirent plus ou moins des descriptions que nous avons évoqués dans la première partie.

La forme du cycle la plus connue est certainement celle simplifiée prônée par l'étude PISA et qui articule problème et modélisation.

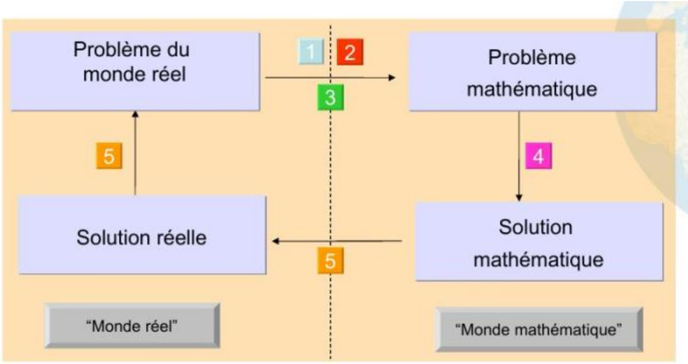


Figure 4. – Le cycle de modélisation dans l'évaluation PISA (Cabassut et Villette, 2012)

Les points numérotés sur le diagramme correspondent à des étapes qu'il sera possible d'observer et de décrire en termes de compétences. Cette approche est plus détaillée dans le cycle de Blum et Leiss (2007) qui insiste sur les compétences cognitives nécessaires pour mettre en œuvre la modélisation :

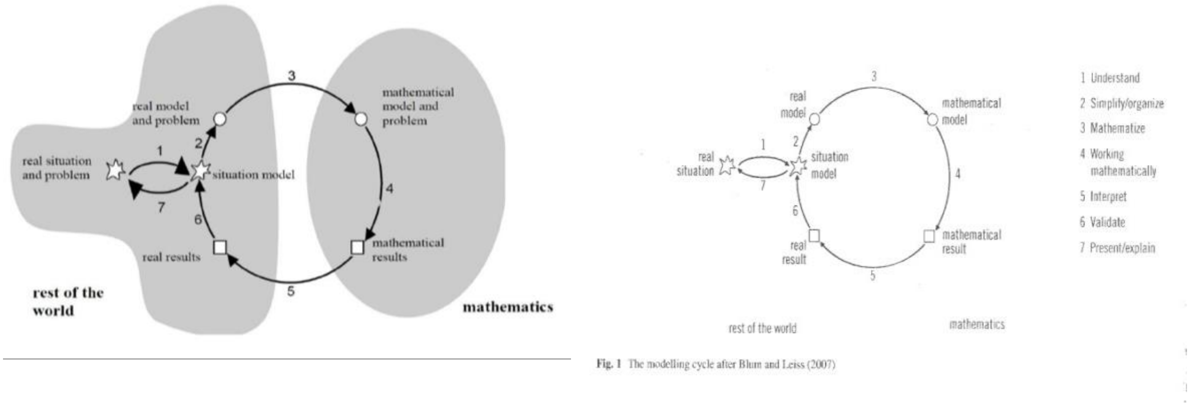


Figure 5. – Le cycle de modélisation de Blum et Leiss
(version 2007 à gauche, version 2017 à droite)

Ce cycle comprend sept processus directement inspirés de la méthodologie de Penrose :

- 1. Comprendre la tâche et construire la situation modèle.
- 2. Simplifier et structurer la situation modèle et construire le modèle réel.
- 3. Traduire (*translating*) le modèle réel en un modèle mathématique (*mathematize*).
- 4. Appliquer les techniques mathématiques pour produire des résultats mathématiques (*working mathematically*).
- 5. Interpréter les résultats mathématiques.
- 6. Valider ces résultats en relation avec la situation réelle.
- 7. Présenter et expliquer le processus de solution ainsi que les résultats.

Il faut noter l'emploi du mot de *translation* pour définir les liens entre le monde réel et le monde mathématique. Nous avons déjà souligné que cette vision simplifie la relation qui existe entre le monde réel et les modèles et qu'elle ne fait pas consensus dans la communauté des didacticiens.

3.3. Les tâches de modélisation

L'enseignement de la modélisation dans les classes passe par le choix et le développement (*design*) de tâches particulières qui doivent permettre aux professeurs d'enseigner la modélisation dans les classes. Dans de nombreux pays des actions de formation d'enseignants ont été développées pour comprendre ces tâches, leur enseignement et leur évaluation. Ces formations ont pu s'appuyer sur des programmes européens de recherche et d'enseignement comme le programme européen LEMA, *Learning and education in and through* modelling (Cabassut et Villette, 2012).

Dans le cadre de ce projet, les auteurs reprennent les points qui sont déterminants selon eux pour établir et enseigner des tâches de modélisation. Ils insistent notamment sur l'authenticité des situations qui ne doivent pas être artificielles, fausses ou irréelles, et doivent ainsi se distinguer des énoncés des problèmes classiques. L'attention est portée également sur la contextualisation des situations proposées qui doit être en relation avec le vécu des élèves. Dans le projet LEMA, les chercheurs ont privilégié des problèmes basés sur des photos comme celui du géant qui a fait l'objet d'études en didactique des mathématiques (Rauscher et Adjiage, 2014).

Figure 6. – Situation du géant. Projet Lema.

3.4. La compétence de modélisation

Les compétences sont au cœur du projet d'enseignement basé sur la modélisation. Une compétence est définie par Niss *et al.* (2004) comme la capacité d'un individu à utiliser correctement les actions appropriées dans une situation de problème où ces actions sont requises ou désirables. Portée par l'OCDE ainsi que par des chercheurs très investis dans le monde éducatif et politique, la modélisation devient une thématique essentielle de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Elle fait partie des curricula mis en place dans la plupart des pays occidentaux.

La compétence de modélisation est considérée comme une des compétences fondamentales en mathématiques et elle peut être déclinée en sept sous-compétences adaptée du cycle de modélisation de Blum et Leiss. Cette façon de voir n'est pas sans conséquences car elle a donné lieu à une sorte d'exubérance évaluative qui passe par l'éclatement de chaque compétence en de nombreuses sous-compétences qui ont sont elles-mêmes évaluées.

3.5. Une approche idéologique et empirique

On peut qualifier cette approche dominante comme une approche idéologique pour différentes raisons. Tout d'abord, elle promeut, sans étude initiale, un enseignement de la modélisation en réponse à tous les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques. Elle repose sur l'idée de compétences dont on peut retrouver l'origine dans le monde des entreprises avec le développement de savoir-faire identifiables et évaluables (Crahay, 2006). Elle insiste sur la notion de *mathematical litteracy* qui est la capacité pour un citoyen de s'approprier correctement les éléments fondamentaux des mathématiques pour un usage dans la vie quotidienne : résolution de problèmes, calcul, usage des artefacts technologiques, etc. De fait, par rapport à l'enseignement de la modélisation pour les ingénieurs, l'enseignement de la modélisation au niveau du secondaire ne vise pas l'excellence mais plutôt un niveau de base pour tous les élèves.

Dès l'origine, il y a eu beaucoup de travaux empiriques autour de l'élaboration de tâches dites de modélisation. La diversité de ces tâches est réellement impressionnante mais comme le signalent Schukajlow *et al.* (2018), on ne sait pas bien ce qu'il en est de leur mise en œuvre dans les classes. Les auteurs soulignent la richesse des propositions et la faiblesse de l'appropriation de cet ensemble de ressources par les professeurs. Par ailleurs, ils soulignent la relative faiblesse des recherches menées sur l'implémentation de ces situations et les effets de la modélisation.

Si l'on se restreint à l'impact réel sur l'apprentissage des mathématiques, le constat n'est pas évident à tirer du fait d'un manque d'évaluation notable sur ce point précis. On peut noter le bilan désabusé de Pollak (2004) qui note qu'il y avait plus de lycéens qui choisissaient les mathématiques au temps des mathématiques modernes que depuis l'introduction de la modélisation. Mais qu'en est-il du rapport des élèves aux mathématiques ? A-t-il changé ? Les choix d'orientation effectués par les lycéens français montrent une vision toujours aussi négative de cette discipline. Mais comment savoir si cela vient de l'accent mis sur les compétences et la modélisation alors qu'il n'est pas évident, surtout en France, que l'enseignement des mathématiques ait pris en compte une approche problématisée des mathématiques ?

3.6. La question de la formation des enseignants sur et autour de la modélisation

Notre expérience de la formation des enseignants est empirique et se limite à l'enseignement donné dans le cadre du master de l'université Paris-Diderot. Cet enseignement s'adressait à des formateurs d'enseignants particulièrement motivés et durait un semestre. Les enseignants étaient confrontés à la modélisation d'un problème complexe qu'ils avaient choisi eux-mêmes : problème de trafic routier à une station de péage, pêche au thon, éradication d'une maladie due aux moustiques, pollution due à un incinérateur de la région parisienne, etc. Il s'agissait alors de comprendre le travail de modélisation dans toute sa complexité, de la définition du problème à des propositions de solution, en passant par la recherche de données utilisables. De cette façon, et sur un temps relativement long, il était possible d'observer un processus évolutif où les décalages entre la réalité et les résultats du travail sur le modèle conduisent plus généralement à raffiner les modèles qu'à les rejeter.

Par la suite, les enseignants en formation devaient envisager des transpositions didactiques compatibles avec les connaissances mathématiques des élèves et avec les contraintes institutionnelles (gestion du temps, dispositifs d'enseignement). Ils devaient aussi penser la modélisation dans le travail mathématique en prenant en compte l'idée de mathématisation et la place des mathématiques.

Enfin, la communication de leur étude passait par la mise au point d'un poster qui rendait visible, de manière synthétique et abordable, l'ensemble de leur travail. Cette forme de communication fait partie intégrante de cet enseignement lié à la modélisation et elle a eu un impact certain sur l'enseignement proposé par les professeurs à l'issue de cette formation.

4. L'approche épistémologique, mais pas que…

Dans l'introduction à un numéro de la revue ZDM consacré à la modélisation dans l'enseignement, Srimanan et Kaiser[5] (2008) introduisent une classification des approches didactiques de la modélisation qui suggère l'existence d'autres types d'approches que l'approche dominante. Les auteurs retiennent essentiellement les approches *sociologique* et *épistémologique*.

L'approche dite *sociologique* est particulièrement active et vivante en Amérique Latine. Elle insiste sur la prise en compte des mathématiques spécifiques aux sociétés dans lesquelles évoluent les élèves. Les thèmes choisis doivent avoir une importance sociale pour les élèves. Ainsi, dans la province indienne d'Oaxaca, Cantoral et son équipe ont insisté sur la mesure des aires dans ce monde agricole où la terre est un facteur d'inégalités sociales mais aussi d'inégalité entre hommes et femmes à propos des héritages ainsi que de tromperies sur le paiement des heures de travail des journaliers pauvres. Nous ne développerons pas cette approche dans ce cours (voir cependant Barbosa, 2006).

La seconde approche identifiée par Kaiser et Srimanan est dite *épistémologique* parce qu'elle privilégie les aspects liés au contenu mathématique et qu'elle insiste sur la mathématisation à travers l'organisation des savoirs à développer. Dans cet ensemble, ils placent la RME et la théorie anthropologique du didactique (TAD), et nous y situerons l'approche plus récente proposée par la théorie des espaces de travail mathématique (ThETM) qui n'était pas alors développée comme théorie.

Dans la suite, nous présentons rapidement quelques-uns des points clés de la RME puis nous développons l'approche de la ThETM. Un cours spécifique a été donné sur la TAD et figure dans cet ouvrage.

5. L'approche constructiviste radicale de la *Realistic Mathematics Education* : importance des modèles émergents

5.1. Une théorie globale sur l'enseignement des mathématiques

Pour avoir une vision globale de la théorie RME, initiée par Freudenthal à partir des années 70 aux Pays-Bas, nous renvoyons à l'ouvrage intitulé *Symbolizing, Modeling and Tools Use in Mathematics Education* (Gravenmeijer *et al.*, 2002). Le titre met l'accent sur trois processus : la production et l'usage de symboles appuyée sur des signes ; la modélisation qui assure progressivement la mise en place d'un raisonnement de preuve ; l'utilisation d'une grande variété d'outils dont certains peuvent être des modèles.

La théorie RME est avant tout orientée vers le développement de situations de classe dont la conception est basée sur un certain nombre de principes (*key-design)* :

[5] On trouvera une note exhaustive de lecture en français de ce numéro dans Kuzniak et Vivier (2011).

- Une approche phénoménologique de la didactique qui, pour les auteurs, implique une attention particulière aux effets de l'enseignement et aux phénomènes didactiques qui peuvent survenir dans la classe.
- Un principe constructiviste qui s'appuie sur la réinvention guidée.
- Un développement de modèles émergents qui participent de cette réinvention.

5.2. Mathématisation et modélisation dans RME

Dès 1971, Freudenthal (1971) insiste sur l'idée que les mathématiques sont d'abord une activité humaine qui consiste à résoudre et chercher des problèmes et plus généralement à organiser un domaine issu de la réalité ou du domaine mathématique. Ce processus d'organisation est désigné sous le nom de mathématisation. Pour lui, il n'y a pas de mathématiques sans mathématisation. Cette conception a des répercussions sur l'enseignement qui ne doit pas seulement partir des mathématiques vers la réalité *(top-down*) mais aussi de la réalité vers les mathématiques (*bottom-up*). Dans l'approche RME, l'accent est mis sur la mathématisation, et la modélisation est au service d'une approche dynamique et constructiviste des mathématiques dans l'enseignement.

La mathématisation passe par une succession de modèles qui permettent un passage graduel du monde réel à la théorie à partir d'une mathématisation dite *horizontale*. Cette dernière s'adresse particulièrement aux élèves de l'école obligatoire. Par la suite, une seconde mathématisation, dite *verticale,* donne accès à des notions mathématiques de plus en plus abstraites.

Dans le cadre de la RME, les situations de la vie quotidienne sont considérées en fonction de leur potentiel didactique comme point de départ de la mathématisation. Leur propos est illustratif et motivant, et l'authenticité n'est pas le critère principal pour la conception des situations d'enseignement.

Comme on le voit, cette idée de mathématisation est bien différente de celle introduite à travers l'idée de modélisation mathématique dans l'approche dominante. Dans cette dernière, l'authenticité des situations de la vie quotidienne est de première importance. À partir de ces situations, un modèle du monde réel émerge et peut être traduit à son tour dans un modèle mathématique avec des calculs ou des traitements mathématiques. L'éducation mathématique est construite sur une simplification des mathématiques appliquées. La RME se démarque une fois encore de l'approche dominante où le modèle apparaît comme une traduction (ou une translation) à partir de situation modélisée :

> In contrast, within the RME conception, modeling is primarily seen as a form of organizing, within both the symbolic and the model itself emerge. (Gravenmeijer *et al.*, 2002, p. 7)

5.3. Modèle émergents et construction de la compréhension

Dans la théorie RME, les modèles sont vus comme des représentations de situations problèmes. Ils peuvent revêtir diverses formes : objets matériels, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et symboles. Ils sont étroitement associés à des représentations symboliques produites dans un premier temps par les élèves. Ces différents modèles sont organisés de manière linéaire et progressive à partir d'un chaînage de modèles dits *émergents*. Le plus souvent possible, ils peuvent être élaborés par les élèves et ne font pas nécessairement partie d'un corpus mathématique institutionnalisé.

Le chaînage mis en place s'appuie sur une succession de situations didactiques qui donnent un rôle différent à chacun des modèles émergents obtenus. Ces derniers sont d'abord des *model of* qui rendent compte du problème et ensuite une fois dégagés, ils deviennent des *model for* pour bâtir de nouveaux problèmes.

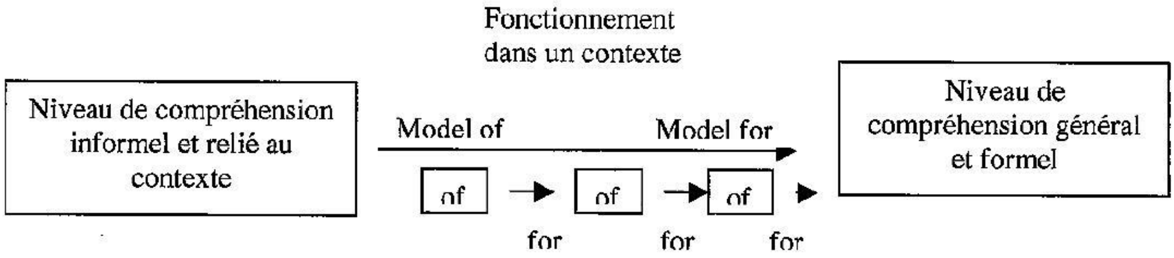


Figure 7. – *Model of* et *model for*

Les auteurs insistent sur la construction de la signification des objets mathématiques embarqués dans le modèle et proposent une construction graduelle de cette compréhension à partir d'un jeu sur les signifiants que Presmeg (2002) interprète avec l'approche triadique de Peirce (Figure 8).

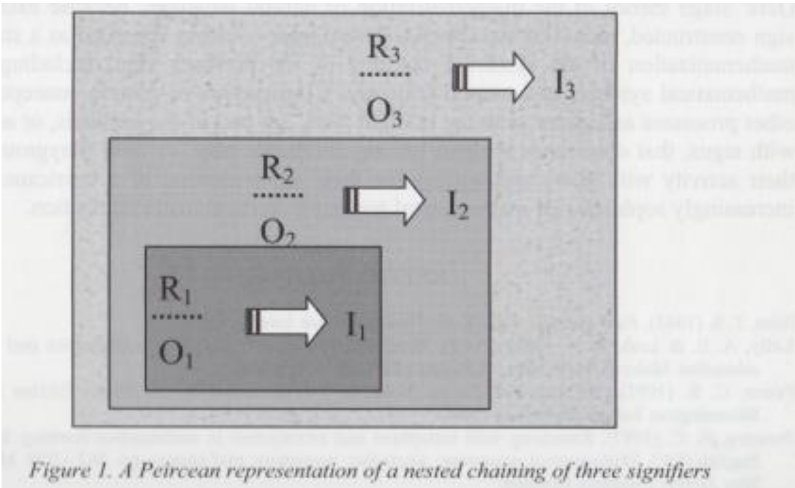


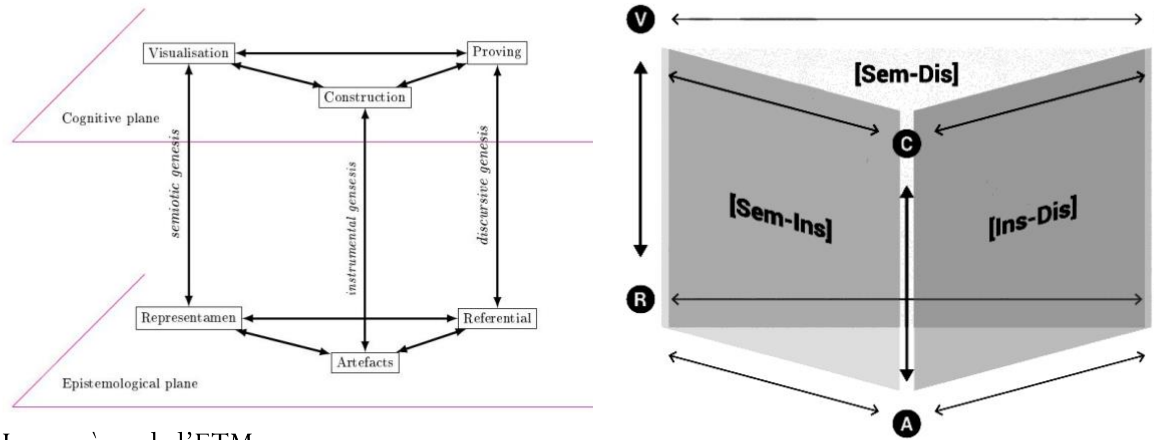
Figure 8. – Une représentation Percienne d'un chainage de trois signifiants suivant Presmeg (2002, p. 135)

6. La théorie des espaces de travail mathématique (ThETM)

6.1. Travail mathématique et modélisation

Comme on vient de le voir avec l'approche RME, l'arrivée de la modélisation comme manière d'aborder l'enseignement des mathématiques a forcé une réflexion sur la question du lien entre l'activité de modélisation et la réalité des mathématiques engagées dans cet apprentissage. Cette question renvoie à la réalité du travail mathématique délivrée par les élèves et les professeurs dans le cadre scolaire. L'étude du travail mathématique (Kuzniak, 2011) est centrale dans la théorie des espaces de travail mathématique (ThETM). Dans ce cours nous ne reprendrons pas les éléments de base de la ThETM, nous renvoyons le lecteur intéressé à de précédents cours de l'école d'été et notamment les cours sur l'enseignement de la géométrie (2007) et sur l'enseignement de l'analyse (2017). Plus récemment, le livre *Mathematical Work* *in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (Kuzniak *et al.*, 2022) propose une présentation globale de la théorie et de certaines de ces applications.

Nous reprenons simplement ici les deux diagrammes qui rendent compte d'un certain nombre des points clés de la théorie, à savoir, la prise en compte des aspects épistémologiques et cognitifs et aussi des trois types de genèses, sémiotique, instrumentale et discursive, qui s'appuient sur les interactions entre signes et visualisation, artefacts et construction, référentiel théorique et preuve (Figure 9).



Les genèses de l'ETM

Les plans verticaux

Figure 9. – Le diagramme de la théorie des espaces de travail mathématique

Par ailleurs, dans cette section, nous nous inspirons aussi de Lagrange *et al.* (2022) où les auteurs présentent et illustrent la perspective des ETM sur la modélisation.

6.2. Mathématisation et modélisation dans la théorie des ETM

Dans ces recherches sur la validation en probabilité, Nechache (2018) réorganise le cycle de modélisation de Blum et Leiss en trois processus : la description mathématique de la réalité, la mathématisation et la validation externe (Figure 8).

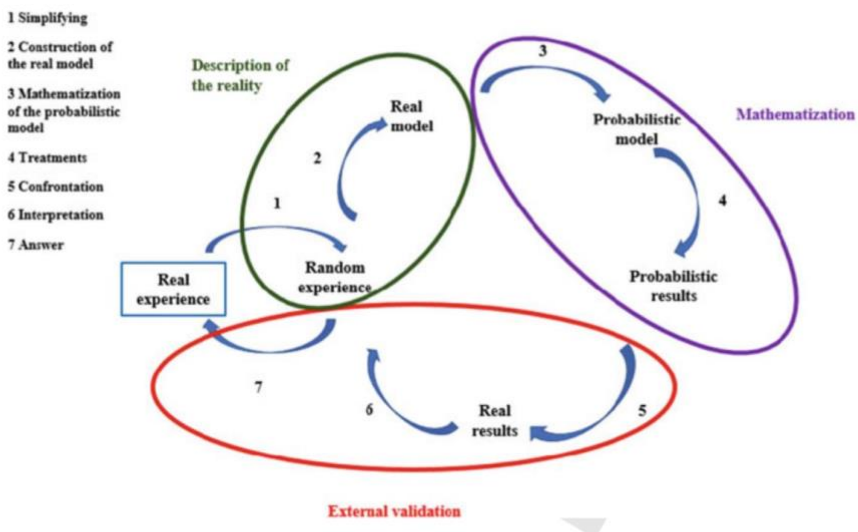


Figure 10. – Mathématisation et cycle de modélisation (adapté de Nechache, 2018)

Dans ce cadre, la mathématisation retrouve la place centrale (mais non unique) que lui attribue Rosenblum dans les mathématiques appliquées. Elle est orientée vers la construction mathématique des objets et la structuration des modèles à l'intérieur de théories. Le travail mathématique consiste à produire, développer et raisonner dans ces modèles.

La mathématisation se distingue ici de la modélisation qui est orientée vers l'action et la solution de problèmes qui se posent dans le monde du travail et dans la société (*operativity*).

Par ailleurs, Lagrange *et al.* (2022) insistent sur la nécessité de prendre en compte l'idée de la localité des modèles dans l'enseignement. Les modèles sont des fragments des mathématiques et ne sont pas une traduction évidente de la réalité. La théorie des ETM prend en compte cette complexité de la modélisation sans réduction à une translation et à un usage du langage mathématique.

Nous proposons une définition[6] des modèles mathématiques qui prend en compte ces différents éléments dans une perspective orientée vers l'enseignement.

> Un modèle mathématique est un fragment de théorie mathématique organisé au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques qui peut s'appliquer à décrire, comprendre ou agir sur le monde, qu'il soit réel ou déjà modélisé au sein d'autres champs scientifiques.

Cette définition des modèles insiste sur leur caractère local avec la nécessité d'une réorganisation à l'intérieur des mathématiques. Elle prend aussi en compte le fait qu'un modèle a un potentiel d'application en dehors des mathématiques (opérativité). Ce potentiel d'opérationnalisation permet de considérer que la modélisation sera orientée vers l'action et la solution de problèmes qui se posent dans la société. Plus particulièrement, et dans le cadre scolaire, elle devra considérer des problèmes qui surgissent dans le monde du travail. Ce dernier point insiste sur le caractère situé des modèles et sur leur impact social.

6.3. Espaces de travail mathématique connectés

En insistant sur l'idée de localité et de complémentarité des modèles, Lagrange a développé une approche de la modélisation, en fin de lycée, qui s'appuie sur une connexion de modèles dont chacun apporte un point de vue différent sur la question posée. Cette pluralité de points de vue associée à une pluralité de modèles permet de rendre compte de la richesse du problème et de la diversité des solutions possibles. Chacune apporte un éclairage nouveau et nécessaire à la compréhension de la réalité.

Chacun des modèles locaux est associé à un ETM particulier, et cet ETM doit être mis en relation avec d'autres modèles associés à des ETM différents. Ainsi, la théorie des ETM permet d'articuler différents points de vue et d'étudier les interactions à la fois cognitives et épistémologiques entre tous ces éléments.

Pour mettre en place cette approche dans les classes, Lagrange *et al.* (2022) utilisent une approche pédagogique développée à partir des années 70 aux États-Unis, *the jigsaw classroom* ou « classe puzzle ». Cette méthode pédagogique permet de faire travailler les élèves en groupe sur différents modèles puis, en recomposant les groupes, de comparer les expériences de chacun.

[6] Naturellement, en conformité avec l'affirmation d'Israel (p. 1) cette définition est locale et ne prétend pas être universelle.

Ainsi, dans le cadre de l'étude d'un pont suspendu, tous les élèves ont tout d'abord été confrontés à un premier modèle phénoménologique. Obtenu à partir de l'observation de photos, il permet par exemple d'exhiber la forme parabolique mais aussi de constater que les élèves négligent les câbles verticaux. Ensuite, quatre modèles sont donnés aux élèves pour rendre compte de la forme du câble. Chaque groupe d'élèves est chargé de l'étude d'un modèle particulier.

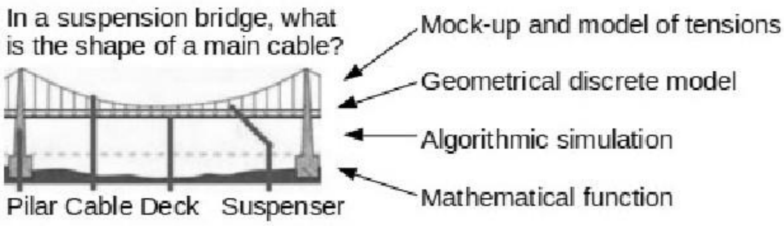


Figure 11. – Les quatre modèles associés au pont suspendu, Lagrange *et al.* (2022)

Puis, les élèves sont répartis dans de nouveaux groupes où sont présents des experts de chaque modèle, c'est à dire des élèves qui ont travaillé sur un modèle particulier. Il est ensuite procédé à une synthèse de tous les travaux de groupes. Cette organisation permet de résoudre la contrainte du temps qui pèse souvent sur les situations de modélisation et d'aborder des problèmes complexes en relativement peu de temps.

Tous les modèles ne sont pas nécessairement mathématiques et peuvent renvoyer à d'autres domaines scientifiques (ici la statique) et mettre en jeu des formes de travail différentes en lien avec ces disciplines.

6.4. Deux exemples de thèses menées dans le cadre de la ThETM

Deux ateliers utilisant la théorie des ETM ont été présentés lors de l'école d'été et s'appuyaient sur les thèses de Masselin (2019) et Reyes (2020). Nous renvoyons à Vandebrouck *et al.* (2023).

6.5. Modélisation du mouvement circulaire uniforme

Dans sa thèse (2020), Reyes a utilisé la théorie des ETM (notamment les paradigmes cinématiques, la circulation du travail mathématique et les diagrammes des ETM) pour, à la fois, concevoir et étudier des ateliers de modélisation destinés à des élèves en fin de lycée au Mexique. L'objectif est de mieux faire comprendre les liens entre mathématiques et physique en associant leurs expressions fonctionnelles à différents types de mouvement.

Pour mener à bien son expérimentation, Reyes a utilisé différents types d'artefacts (Tracker, Geogebra, Diabolos, etc.) qui permettent de faire évoluer le travail de modélisation en relation avec les genèse instrumentales et sémiotique mais aussi avec la genèse discursive. L'ensemble s'appuie sur un passage graduel d'un paradigme proche de la réalité (CI) à un paradigme où les modèles sont exprimés à l'aide de courbes paramétrées (CIII). De ce fait, le travail mathématique s'avère particulièrement riche du fait de ces interactions entre toutes les genèses. Dans la théorie, ce travail mathématique est qualifié de complet. L'évolution proposée par Reyes ressemble, par certains de ces aspects, aux travaux de RME sur les différents types de mathématisation horizontale et verticale.

6.6. Modélisation d'une tâche en probabilité avec usage de la simulation

Cette fois, il s'agit de voir comment l'usage de deux modèles probabilistes pour la résolution d'une tâche (le lièvre et la tortue) a pu influer sur les productions des élèves et les interactions entre professeur et élèves. Pour cela, Masselin (2019) a conduit une étude très détaillée des ETM idoines, potentiel et effectif, de plusieurs professeurs engagés dans une formation continue en probabilités. Pour des raisons institutionnelles, la résolution de la tâche doit passer par une simulation de la situation. De ce fait, les analyses de Masselin permettent de discuter de la place et des enjeux de la simulation en interrogeant le type de travail mathématique mis en œuvre. Par ailleurs, son étude questionne également les interactions entre professeurs et élèves et la nature du contrat didactique qui se met en place lors de ces sessions de modélisation.

7. Quelques questions en suspens...

Pour conclure cet article, nous aborderons rapidement quelques points qui restent problématiques et méritent l'attention de la communauté des chercheurs et enseignants francophones.

7.1. La place de la modélisation mathématique dans les recherches en didactique des mathématiques.

Nous ne l'avons pas vraiment souligné dans ce cours, mais il faut noter la faible implication des chercheurs français dans les recherches menées sur la modélisation dans l'enseignement. Peu d'entre eux ont participé aux études ICMI et aux groupes et recherches internationales sur ce sujet. Depuis peu, la situation a évolué et les approches propres au courant de la didactique développée en France se révèlent pertinentes et tout à fait en phase avec le développement critique des recherches en ce domaine. Nous avons pu le voir avec la théorie des ETM mais c'est aussi le cas avec la TAD qui fait l'objet du second cours.

La recherche en ce domaine passe, selon nous, par une réflexion approfondie sur les tâches de modélisation articulée avec les questions de problématisation. Elles supposent aussi une exploration des composantes tant épistémologique que cognitives des ETM impliqués dans la résolution d'un problème. Vu l'importance des recherches internationales menées dans le domaine, il nous semble nécessaire d'interagir avec d'autres équipes en utilisant les approches menées dans le cadre du *networking* entre théories.

7.2. La démathématisation actuelle provoquée par les outils digitaux et la simulation.

Un point vient télescoper les recherches et plus profondément la nature même de la question du travail mathématique mis en œuvre par les élèves. Il est relié à ce qu'il est convenu d'appeler la démathématisation actuelle des activités nécessitant des savoirs mathématiques. Les outils mathématiques sont maintenant englobés dans des artefacts technologiques de plus en plus puissants dont l'Intelligence Artificielle représente une des formes les plus abouties. De ce fait, ils sont rendus invisibles et leur étude peut apparaître inutile aux élèves qui ne voient plus l'intérêt des mathématiques et peuvent se contentent de presser les boutons de machines qui produisent les résultats.

Il faut aussi noter l'apparition d'une modélisation sans modèle mathématique favorisée par ces outils de simulation. Il suffit alors de décrire les procédures mises en jeu dans la situation sans nécessairement les comprendre pour produire des résultats. Il s'agit là de ce que Varenne (2009) appelle la modélisation algorithmique qui permet de résoudre les problèmes sans nécessairement les comprendre et pouvoir expliquer les solutions obtenues.

7.3. Mathématisation et travail mathématique

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'assurance d'un travail mathématique associé à la modélisation nécessite une approche structurée autour d'une mathématisation qui s'appuie sur un ensemble de situations problématisées. De manière concrète, cela passe par une réflexion tant épistémologique que cognitive sur les savoirs mis en jeu dans les tâches de modélisation. De cette façon, il est possible de développer ce qu'il est convenu d'appeler un *instructional design* ou, pour rester dans la tradition française, un ensemble structuré de tâches et de situations didactiques qui permettent un enseignement des mathématiques sur le long terme et attentif aux contenus mathématiques. Cet ensemble prend en compte les enjeux épistémologiques en s'appuyant sur une variété de modèles. Ces modèles sont rendus opérationnels et visibles grâce à des artefacts adaptés. De cette façon, il est possible d'espérer donner du sens aux objets et outils mathématiques en ne se limitant pas à la seule modélisation algorithmique et à des simulations aveugles ou à la simple formulation des questions.

Références

Clements, D. (1989). *Mathematical Modelling. A case study approach*. Cambridge University Press.

Bertalanffy (von), L. (1968). *Theorie générale des systèmes.* Dunod.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 293-301.

Cabassut, R. et Villette, J.-P. (2012). Un exemple d'analyse des croyances des enseignants envers l'enseignement de la modélisation. In J.-L. Dorier et S. Coutat (eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012* (p. 668-677). Université de Genève.

Checkland, P. B. (1981). *Systems Thinking. Systems Practice.* John Wiley.

Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie. 154,* 97-110.

Freundenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics. 3*, 413-435.

Gravemeijer, K., Lehrer, R., Oers, B., & Verschaffel, L. (2002). *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Kluwer.

Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique.* Seuil.

Kaiser, G., Blomhøj, M. et Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 82-85.

Klamkin, M. (1971). On the ideal role of an industrial mathematician and its educational implications. *American Mathematical Monthly, 78*(1), 53-76.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. et Vivier, L. (2011). *L'enseignement de la modélisation. Mise en perspective critique. Cahier du LDAR n°3.* IREM de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110170/document

Kuzniak, A., Montoya, E. et Richard, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces.* Springer.

Lagrange, J. B., Huincahue, J. et Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya et P. Richard (eds.). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (p. 247-266). Springer.

Masselin, B. (2020). *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde: métamorphoses d'un problème au fil d'une formation.* Thèse de doctorat. Université de Paris.

Nechache, A. (2018). L'articulation des genèses de l'espace de travail mathématique dans la résolution des tâches probabilistes faisant appel à la modélisation. *Menon, Journal of Mathematical Education, 4,* 93-104.

Niss, M., BLum, W. et Galbraith, P. (2007). Introduction. In Blum *et al.* (Eds), *Modeling and Applications in Mathematics Education* (p. 3-32). Springer.

Pollak, H. (2004). Mathematic modelling – a conversation with Henry Pollak. In Blum *et al.* (Eds), *Modeling and Applications in Mathematics Education,* (p. 109-120). Springer.

Presmeg, N. (2002). Transitions in emergent Modeling. In K. Gravemeijer *et al.* (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* (p. 131-137). Kluwer.

Penrose, O. (1978). How can we teach Mathematical Modelling? *Journal of Mathematical Modelling for Teachers*, *1*(2), 31–42.

Rauscher, J-C. et Adjiage, R. (2014). Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-1), 41-64.

Reyes, C. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique.* Thèse de doctorat. Université de Paris.

Schukajlow,G., KaiserG. et Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education, 50*(1-2), 5-18.

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Buffet, C. et Vivier, L. (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des ateliers des actes de l'école d'été 21*. IREM de Paris.

Varenne, F. (2009). Épistémologie des modèles et des simulations : tour d'horizon et tendances. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144

Wagner, P. (2002). Qu'est-ce que la théorie des modèles ? In P. Nouvel (Ed.), *Enquête sur le concept de modèle* (p. 7-28). PUF.

Wigner, E. (1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics, 13*(1), 1-14.