La contribution des environnements technologiques à l'enseignement de la preuve

Maria Alessandra Mariotti

Université de Sienne

Cette contribution traite de l'utilisation d'un environnement de géométrie dynamique pour favoriser l'introduction des élèves à la preuve mathématique. Dans le cadre de la théorie de la médiation sémiotique, j'explore, d'une part, le lien entre les outils informatiques disponibles et les significations personnelles émergeant de leur utilisation dans les activités en classe et, d'autre part, les notions mathématiques qui font l'objet de l'enseignement. La discussion utilise trois perspectives interdépendantes – épistémologique, cognitive et didactique – pour élaborer les résultats d'un certain nombre d'expériences d'enseignement sur le long terme dans des salles de classe du secondaire. Des exemples illustratifs sont présentés, tirés des études de recherche conduites au cours des années précédentes et toujours en cours.

Mots-clés : conjecture ; conditionnalité ; démonstration par l'absurde ; théorie de la médiation sémiotique ; environnement de géométrie dynamique (EGD)

The contribution of technological environments to the teaching of proof

This contribution discusses the use of a dynamic geometry environment to promote students' introduction to mathematical proof. Within the framework of semiotic mediation theory, I explore, on the one hand, the link between available computer tools and the personal meanings emerging from their use in classroom activities and, on the other hand, the mathematical notions that are the subject of teaching. The discussion uses three interrelated perspectives—epistemological, cognitive and didactic—to elaborate the outcomes of a number of long-term teaching experiences in secondary classrooms. Illustrative examples are presented, drawn from research studies conducted in previous years and still ongoing.

Keywords: conjecture; conditionality; proof by contradiction; semiotic mediation theory; dynamic geometry environment (DME)

Mariotti, M. A. (2024). La contribution des environnements technologiques à l'enseignement de la preuve. *Recherches en didactique des mathématiques*. Numéro spécial. *Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques*, 61-87, https://doi.org/10.46298/rdm.12906

La contribución de los entornos tecnológicos a la enseñanza de las pruebas

Esta contribución analiza el uso de un entorno de geometría dinámica para promover la introducción de la demostración matemática al alumnado. En el marco de la teoría de la mediación semiótica, se explora, por un lado, el vínculo entre las herramientas informáticas disponibles y los significados personales que emergen de su uso en las actividades en clase y, por otro, las nociones matemáticas que son objeto de enseñanza. El análisis utiliza tres perspectivas interrelacionadas -epistemológica, cognitiva y didáctica- para elaborar los resultados de una serie de experiencias docentes de larga duración en clases de secundaria. Se presentan ejemplos ilustrativos extraídos de estudios de investigación realizados en años anteriores y aún en curso.

Palabras clave: conjetura; condicionalidad; prueba por contradicción; teoría de la mediación semiótica; entorno de geometría dinámica (DME)

1. Introduction

La recherche sur la preuve et la démonstration dans l'enseignement des mathématiques est ancienne. Les critiques des modèles traditionnels d'enseignement de la preuve (Herbst, 2002) ont bien montré certaines des raisons des difficultés à comprendre le rôle de la preuve en mathématiques, mais surtout ils ont montré l'inefficacité de ces modèles dans le développement des compétences des élèves par rapport à la preuve, et à la démonstration en particulier. Au-delà de la réaction immédiate et radicale qui a conduit à abandonner la pratique de la preuve à l'école, parfois en se débarrassant des théorèmes et, en général, en réduisant l'importance de la preuve dans les programmes (Curricula) du secondaire, les études dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve ont ouvert de nouvelles perspectives de recherche en prenant des pistes différentes qui ont alimenté un débat, quelques fois très animé. La perspective épistémologique s'est focalisée sur le projet d'éclaircir la relation entre la preuve dans la pratique mathématique et son statut et son rôle dans le domaine de l'éducation (e.g. Hanna, 1989 ; Hanna et Janke, 2007 ; Duval, 2007 ; Balacheff, 2008 ; Hanna *et al.*, 2010). D'autre part, une perspective plus spécifiquement éducative, en combinant la dimension cognitive et didactique, s'est concentrée sur l'analyse des pratiques des étudiantes liées soit à la preuve en général, soit, plus spécifiquement, à la démonstration (e.g. Harel et Sawder, 1998). Pour une discussion plus détaillée et des synthèses raisonnées des contributions sur ce thème je renvoie à (Mariotti, 2006 ; Reid et Knipping, 2010 ; Hanna et De Villiers, 2012 ; Stylianides *et al.*, 2016)[1].

Ce que je présente ici sont quelques résultats qui font partie d'une série d'études concernant l'utilisation d'un environnement de géométrie dynamique (EGD) pour initier les élèves du secondaire à la preuve et à la démonstration ; en particulier, ce sont des expériences/interventions didactiques conçues pour soutenir et favoriser le développement du sens mathématiques de la preuve et du signifié spécifique du terme *démonstration*. Certaines de ces expériences ont été réalisées par l'auteur, parfois en collaboration

[1] Une riche source de références peut être trouvée à l'adresse http://lettredelapreuve.org ; pour ce trésor de références, nous sommes redevables à Nicolas Balacheff et son esprit de service à la communauté.

avec d'autres collègues. Certaines d'entre elles ont duré des années et ont impliqué différentes classes pendant toute une année scolaire (Mariotti, 2000, 2001, 2007), tandis que d'autres étaient plus circonscrites, impliquant seulement des entretiens, individuels ou avec des paires d'élèves. Les entretiens visaient à observer en détail les comportements des élèves face à des problèmes ouverts demandant de formuler une conjecture. En développant cette large base de résultats, mon objectif n'est pas de donner un aperçu général de la riche recherche sur la preuve en relation avec les outils technologiques. Il s'agit d'une part d'illustrer les potentiels didactiques d'un type spécifique d'environnement numérique pour promouvoir le développement du sens de la preuve et, d'autre part, une perspective théorique. Certains des résultats présentés ici ont été publiés ailleurs ; par exemple, dans Mariotti (2012, 2014), Baccaglini-Frank *et al.* (2018). Dans ce qui suit, je propose une synthèse des contributions présentées au cours des dernières années basées sur l'utilisation du cadre unificateur de la théorie de la médiation sémiotique (TMS) et, plus précisément, sur la notion de *potentiel sémiotique* d'un artefact.

Dans la section suivante, j'introduis les perspectives éducatives et épistémologiques qui vont encadrer ma discussion. Dans le cadre de la TMS, j'utilise la notion théorique de potentiel sémiotique afin d'expliquer pourquoi et comment certaines activités conçues dans un EGD peuvent contribuer à la construction de significations spécifiques constituant le sens mathématique de la preuve[2]. Puis je présente une caractérisation spécifique de théorème avec le but d'éclaircir le sens mathématique de la preuve, et je commence à discuter des potentialités offertes par un EGD. Je développe tout d'abord les problèmes de construction géométrique en discutant la façon dont la solution de tels problèmes peut être liée aux significations clés des axiomes et des théorèmes. Dans les sections suivantes, je discute la façon dont les problèmes ouverts de construction et le processus de conjecture associé, lorsqu'il est effectué dans un EGD, peuvent donner du sens à la notion d'énoncé conditionnel, en offrant un contexte pour relier les arguments spontanés à la preuve mathématique. La dernière question abordée concerne le potentiel offert par l'exploration dans un EGD de figures géométriques impossibles par rapport au développement du sens de la preuve indirecte.

2. Cadre théorique

Dans cette section, je discute des fondements théoriques de mes recherches sur l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC) pour favoriser l'engagement des élèves dans la preuve mathématique. Ces fondements comprennent une perspective didactique (éducative) basée sur la théorie de la médiation sémiotique, une perspective épistémologique basée sur des significations mathématiques liées à la preuve et la notion de théorème mathématique.

[2] Après Sinclair et Robutti (2002), je vais utiliser l'expression « environnement de géométrique dynamique ». Comme les auteurs l'écrivent, depuis au moins 1996, ce terme a été utilisés à la place de *logiciel de géométrie dynamique* "to underscore the fact that we are dealing with microworlds (including pre-existing sketches and designed tasks) and not just a software program" (p. 571).

2.1. Perspective didactique

La TMS (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008 ; Mariotti, 2009) combine une perspective sémiotique et une perspective éducative dans un modèle qui développe la notion vygotskienne de médiation sémiotique. Elle considère comme crucial le rôle de la médiation humaine dans le processus d'enseignement-apprentissage. Partant de la notion clé d'artefact, la TMS interprète le processus d'enseignement et d'apprentissage selon une perspective sémiotique. La TMS se concentre sur la production de signes par les élèves et l'évolution de ces signes, des significations personnelles émergeant de l'utilisation d'un artefact aux significations mathématiques qui sont le but de l'enseignement. Une hypothèse de base est que les significations personnelles qui émergent dans l'accomplissement d'une tâche peuvent être liées à des significations mathématiques spécifiques, mais aussi qu'une telle relation ne peut pas être tenue pour acquise. Au contraire, l'intervention[3] *intentionnelle* de l'enseignant est nécessaire pour promouvoir, dans l'interaction sociale, la construction consciente de cette relation par les élèves. Selon une approche vygotskienne, la TMS considère comme fondamentales à la fois la production individuelle de signes et leur élaboration collective au sein des activités sociales, et en particulier dans les discussions mathématiques (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008).

Au cours des dernières années, plusieurs expériences sur le long terme ont été menées dans les classes, à différents niveaux scolaires, pour vérifier, affiner et élaborer nos hypothèses. Différents artefacts[3] ont été impliqués, qu'ils soient concrets ou numériques (voir Bartolini Bussi, 1996 ; Mariotti, 2007, 2010). Le cadre théorique de la TMS est né et s'est développé autour de deux éléments clés : la notion de potentiel sémiotique d'un artefact et la notion de cycle didactique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). Ici, je vais me concentrer sur la notion de potentiel sémiotique qui sera utilisée dans la discussion suivante. Pour ce qui concerne le cycle didactique, il constitue le modèle sur lequel on va organiser les activités en classe, et la séquence va être conçue comme une série de cycle didactiques.

Lorsqu'un artefact est utilisé pour accomplir une tâche, il peut arriver qu'un expert – un mathématicien – reconnaisse l'écho de notions mathématiques spécifiques. Par exemple, l'utilisation d'un boulier peut immédiatement rappeler la notion mathématique de notation positionnelle et de notation polynomiale des nombres. Comme je l'expliquerai plus tard, dessiner une figure dans un système de géométrie dynamique peut évoquer la notion classique de constructions géométriques à la règle et au compas. Cependant, si l'utilisateur n'est pas un expert, les significations émergeant de l'utilisation de l'artefact peuvent ne pas être immédiatement et consciemment liées aux significations mathématiques. Au lieu de cela, elles sont liées au contexte spécifique et à l'individu. Ce sont des significations personnelles, on pourrait aussi parler de significations situées, en suivant Lave (1988) et sa reprise par Noss et Hoyles (1996).

Pour exprimer la double relation liant l'artefact et son utilisation, d'une part avec des significations personnelles possibles et, d'autre part, avec des significations mathématiques, la TMS introduit la notion de *potentiel sémiotique* (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008, p. 754). Cette notion exprime également la double utilisation d'un artefact dans un contexte éducatif. L'artefact est utilisé par les élèves pour

[3] Le terme artefact fait référence à tout produit générique de la culture humaine conçu pour agir ou interagir dans un cadre humain.

accomplir une tâche, mais est simultanément utilisé par l'enseignant pour exploiter son potentiel sémiotique et favoriser l'émergence des significations mathématiques pertinentes chez les élèves. Par conséquent, l'analyse du potentiel sémiotique d'un artefact est au cœur de la conception et de l'enseignement d'une séquence de leçons. Une telle analyse implique à la fois des aspects cognitifs et épistémologiques. Le premier identifie les significations qui peuvent émerger dans l'accomplissement d'une tâche donnée tandis que le second identifie les significations mathématiques possibles évoquées par un expert (enseignant mathématicien). Dans cette contribution, j'utilise la notion de potentiel sémiotique pour illustrer et discuter du potentiel éducatif d'une EGD en ce qui concerne les significations mathématiques liées à la preuve.

2.2. Perspective épistémologique

La démonstration est l'un des éléments clés des mathématiques. Elle est le produit d'un processus de validation qui permet l'inclusion de chaque nouvel énoncé dans une théorie spécifique, étant donné qu'un tel énoncé peut être logiquement dérivé de l'ensemble des axiomes précédemment supposés. Une telle perspective formelle (Arzarello, 2007) rend la preuve indépendante de toute vérification factuelle des affirmations impliquées. À cet égard, la spécificité de la preuve par démonstration contraste avec l'argumentation elle-même et avec toutes actions ou processus de raisonnement visant à convaincre les autres (ou soi-même) que quelque chose est vrai ou faux.

Comme Duval l'a clairement indiqué (2007), l'écart cognitif existant entre l'argumentation et la démonstration demande de distinguer les deux processus, en dépit de leur contiguïté possible. Cet écart cognitif concerne la distinction entre la fonction principale de l'argumentation – convaincre quelqu'un, ou bien se convaincre soi-même, qu'un certain énoncé est vrai – et la fonction principale de la preuve mathématique – valider un énoncé dans une théorie spécifique. Du point de vue épistémologique, cet écart correspond à la distance entre le niveau sémantique, où l'interprétation d'un énoncé et des arguments qui l'accompagnent trouvent les raisons pour leur acceptabilité, et le niveau théorique où la validité théorique d'un énoncé doit être dérivé conformément aux lois de la logique en accord avec une approche *hypothétique-déductive.*

Selon cette analyse, du point de vue éducatif, le risque concerne la possibilité de confondre les deux processus, et en particulier, confondre le niveau sémantique et le niveau théorique. Cette possibilité est en effet très fréquente : si en principe, dans une preuve mathématique, une démonstration, on n'est pas obligés de faire référence à une interprétation des énoncés en cause, il n'est pas pour autant réaliste pour les mathématiciens ou les élèves de penser qu'une telle interprétation ne joue pas un rôle crucial soit dans la production, soit dans l'acceptation d'une preuve. En effet, du point de vue cognitif, c'est l'interprétation donnée aux énoncés qui détermine la valeur épistémique finale attribuée à l'énoncé qui a été prouvé. De plus, c'est sur le plan sémantique que repose la fonction explicative que toute preuve est censée fournir (Hanna, 1989). Le plan sémantique développe la compréhension du *pourquoi* ce qui a été prouvé est acceptable comme vrai (Dreyfus et Hadas, 1996).

En résumé, la question didactique de la preuve demande de résoudre le conflit potentiel entre les deux fonctions principales de la preuve : valider théoriquement, et expliquer pourquoi. Cela signifie que pour aborder la question, il faut développer une intervention pédagogique/didactique qui puisse permettre aux élèves de développer une relation de *signification cohérente* entre la notion d'argumentation et celle de démonstration, tout en préservant leur spécificité. Dans cette perspective, dans ce qui suit, je vais développer davantage la notion de démonstration.

Le terme preuve est souvent utilisé, à la fois dans la littérature actuelle en didactique des mathématiques et dans la pratique scolaire (soit dans la classe soit dans les manuels), sans aucune référence claire aux autres éléments clés qui sont impliqués : l'*énoncé* que l'on veut valider et la *théorie* dans laquelle la validation va se développer. En effet, si l'objectif d'une démonstration consiste à valider un énoncé dans une théorie, comment peut-on comprendre le sens d'une démonstration sans la lier explicitement à l'idée de *théorie* – à la fois le système théorique défini par les axiomes, les définitions et les théorèmes déjà démontrés, et le système métathéorique des règles d'inférence énonçant ce que l'on entend par dérivée *logiquement*.

Très souvent, lorsque l'on discute de la question de la preuve, on prend le point de vue des experts en mathématiques et la référence à un énoncé et à une théorie est laissée implicite. Cependant, si nous prenons le point de vue des élèves, nous nous rendons compte que la perspective de l'expert ne peut être tenue pour acquise, et, surtout, que la complexité de la notion de théorie ne peut être sous-estimée. D'une part, les significations doivent être développées par rapport au statut et au rôle des différentes propositions impliquées dans une preuve. C'est-à-dire que la signification mathématique de termes comme théorie, axiomes, définitions et théorèmes doit être développée dans la classe et devenir objet d'apprentissage. D'autre part, la conscience des moyens disponibles pour assurer le passage d'un pas à l'autre d'une preuve – les modalités d'inférence spécifiques qui peuvent être utilisées pour valider une nouvelle proposition – doit également être prise en compte par l'enseignante avec le but que l'acceptation de ces moyens soit partagée en classe. Ce dernier point, central, a été clairement souligné par Sierpinska (2005) :

> Theoretical thinking asks not only, *Is this statement true?* but also *What is the validity of our methods of verifying that it is true?* Thus theoretical thinking always takes a distance towards its own results. [...] theoretical thinking is thinking where thought and its object belong to distinct planes of action.
> (Sierpinska, 2005, p. 122)

Dans le contexte scolaire, la complexité de ce niveau métathéorique semble être ignorée. Il est généralement tenu pour acquis que les méthodes de raisonnement/validation des élèves sont spontanément adaptables au fonctionnement sophistiqué d'un système théorique. Par conséquent, on n'en parle pas beaucoup et, en particulier, les règles d'inférence et leur fonctionnement dans le développement d'une théorie sont rarement rendus explicites[4] , mais surtout ils ne sont presque jamais problématisés.

[4] Une exception est celle de l'induction mathématique. Mais l'induction mathématique est très rarement présentée par rapport à d'autres modalités de preuve qui sont généralement considérées comme des méthodes de raisonnement naturelles et spontanées.

En fait, au moins deux aspects du niveau métathéorique devraient être explicités et discutés en classe :

1. l'acceptabilité de certains moyens d'inférence spécifiques,
2. et le fait que, à l'exception de ceux explicitement partagés, aucun autre moyen d'inférence n'est acceptable.

Si les aspects métathéoriques restent implicites, les élèves n'ont aucun contrôle sur leurs arguments. Le contrôle reste totalement sous la responsabilité de l'enseignant, ce qui a pour conséquence que les élèves ressentent de la confusion, de l'incertitude et un manque de compréhension. La conscience d'une théorie de référence en tant que système de principes partagés et de règles d'inférence est nécessaire si nous voulons parler de preuve dans un sens mathématique. En effet, ce qui caractérise un théorème mathématique, c'est le système de trois composantes : l'énoncé, la démonstration et la théorie (Mariotti *et al.*, 1997, p. 182).

Développer les significations interdépendantes de chaque composante de la notion de théorème mathématique peut devenir donc un objectif crucial d'enseignement et d'apprentissage. Dans ce qui suit, je propose des interventions possibles, cohérentes avec cet objectif, reliant le développement des significations mathématiques des composantes du théorème aux significations émergeantes de certaines activités dans un EGD.

3. Initier les élèves aux théorèmes

Depuis l'apparition des EGD, différents travaux de recherche ont mis en évidence leurs potentiels et leurs pièges (De Villiers, 1998). Pour autant, et sans aucun doute, ces environnements offrent des ressources puissantes pour initier les élèves à la preuve. Comme Hadas et ses collègues l'ont souligné :

> [The] findings concerning the failure to teach proofs, the recognition of the multiple aspects of proving, and the existence of DG tools lead naturally to the design of investigative situations in which DG tools may foster these multiple aspects. (Hadas *et al.*, 2000, p. 130)

Dans ce qui suit, je vais focaliser mon attention sur les potentiels d'un EGD par rapport à la notion de construction géométrique puis, dans le cadre théorique de la TMS, je les décrirai en termes de potentiel sémiotique.

3.1. Construction géométrique dans un EGD

Partons de la relation, immédiatement évoquée dans l'esprit de tout mathématicien, entre le dessin d'une figure dans un EGD et le signifié mathématique d'une construction géométrique, c'est-à-dire le dessin d'une figure à la règle et au compas. Dans le cadre de la TMS, une telle relation peut être décrite à la fois par une analyse épistémologique et une analyse cognitive qui permettent l'expression du potentiel sémiotique de l'artefact EGD par rapport à la signification de théorème.

La géométrie euclidienne est traditionnellement appelée *géométrie de la règle et du compas*. Cependant, bien qu'elle se réfère à un objectif concret – par exemple, produire une trace graphique sur une feuille de papier ou une autre surface – une construction géométrique a un caractère purement théorique.

Résoudre un problème de construction correspond à démontrer un théorème qui valide la procédure de construction (Mariotti, 2007). La preuve se réfère au système d'axiomes du système théorique des Éléments d'Euclide dont l'origine se trouve dans les pratiques et les usages de la règle et du compas. Pour apprécier le rôle clé joué par les problèmes de construction en géométrie euclidienne, il suffit de se rappeler que la toute première proposition du premier livre des Éléments traite de la construction d'un triangle équilatéral. Mais ce sont surtout les cas d'impossibilité qui clarifient la nature théorique des problèmes de construction. La constructibilité ou la non-constructibilité d'une figure a été une question centrale en mathématiques (Arzarello *et al.*, 2012). Il suffit de se rappeler la longue histoire du problème de la trisection d'un angle ; un problème déroutant qui s'est avéré définitivement impossible à résoudre à la règle et au compas. Bien que, comme l'ont montré des études de recherche classiques (Schoenfeld, 1985), le sens théorique de la construction géométrique soit complexe et difficile à saisir, la centralité de son rôle dans l'histoire de la géométrie et son renouveau dû à l'apparition des EGD la rendent digne de considération.

D'une part, l'utilisation d'outils virtuels simule l'utilisation concrète d'outils traditionnels comme la règle et le compas. D'autre part, l'architecture numérique d'un EGD, intégrant le cadre théorique de la géométrie euclidienne (Laborde et Sträßer, 1990), permet à l'utilisateur de mettre en œuvre les relations logiques entre les propriétés géométriques construites avec les outils et les propriétés géométriques qui en sont les conséquences. De plus, chaque EGD offre une modalité de déplacement (*dragging*) qui représente le cœur de l'environnement technologique.

La modalité de manipulation directe permet à l'utilisateur de modifier n'importe quelle figure construite après avoir cliqué et fait déplacer l'un de ses points de base. Une fois qu'un point sélectionné a été déplacé, la figure à l'écran est redessinée et recalculée à partir des nouvelles positions, mais elle conserve toutes les propriétés définies par la procédure de construction. En conséquence, la *stabilité par déplacement* constitue le test standard d'exactitude pour toute figure dessinée. Ainsi, une solution à un problème de construction est acceptable si et seulement si la figure à l'écran est stable sous le test de déplacement. Parce que tout EGD incarne un système de relations cohérent avec le système large d'une théorie géométrique, résoudre des problèmes de construction dans un EGD signifie non seulement accepter toutes les fonctionnalités du logiciel, mais aussi accepter un système logique dans lequel les phénomènes géométriques qui se produisent à l'interface de cet environnement prennent du sens, notamment ceux liés à la présence de propriétés invariantes par déplacement.

Une figure dynamique se comporte selon sa logique intrinsèque : ses éléments sont liés par les relations hiérarchiques déterminées par la procédure de construction. Une telle hiérarchie correspond à une relation de dépendance logique entre les propriétés dans le sens où la figure finale ne montrera pas seulement les propriétés construites, mais aussi toutes les propriétés qui peuvent en être dérivées selon la géométrie euclidienne. Des outils spécifiques du menu EGD correspondent à un ensemble d'outils de construction théoriques en géométrie euclidienne (Laborde et Laborde, 1991). Cela permet d'énoncer une correspondance entre le contrôle par déplacement (test de déplacement) et la validation par des théorèmes (par exemple, validation par démonstration dans la théorie de la géométrie euclidienne)[5].

[5] En fait, un EGD fournit un plus grand ensemble d'outils, y compris par exemple l'outil « mesure » (d'un segment ou d'un angle), l'outil rotation d'un angle, et d'autres. Tout cela implique que l'ensemble des constructions possibles ne coïncide pas

3.2. Le potentiel sémiotique des outils de construction EGD

En interprétant l'analyse précédente en termes de potentiel sémiotique, nous pouvons reconnaître une double relation entre certains outils d'une EGD et, d'une part, les significations émergeant de leur utilisation dans la résolution d'une tâche de construction et, d'autre part, des significations mathématiques spécifiques liées à la notion de théorème. Des outils de construction spécifiques peuvent être liés à un dessin dynamique virtuel représentant une figure géométrique dont l'acceptabilité en tant que solution d'un problème de construction peut être contrôlée en vérifiant sa stabilité par déplacement. Dans le même temps, l'utilisation de certains outils spécifiques de construction évoquent des axiomes et des théorèmes géométriques correspondants, qui peuvent être utilisés pour valider la procédure de construction dans la théorie de la géométrie euclidienne. En d'autres termes, la solution d'un problème de construction dans un EGD peut évoquer le sens (la signification) théorique des constructions géométriques. L'exploitation du potentiel sémiotique d'un EGD peut donc supporter le développement du sens mathématique de la démonstration comme preuve référée à une théorie particulière.

Cela a été le principe inspirateur de la conception d'un certain nombre d'expériences menées sur le long terme dans des classes de lycée (avec des élèves de 15 et 16 ans). Il s'agissait de développer une séquence de cycles didactiques, basée sur des activités recourant à des outils de construction spécifiques et des activités sémiotiques visant à l'élaboration et l'évolution individuelle et sociale des significations personnelles vers les significations mathématiques visées (voir Mariotti, 2000, 2001, 2009).

3.3. Analyse de la tâche de construction

Comme expliqué ci-dessus, le potentiel sémiotique d'un artefact est fondé sur la tâche de construction et concerne la relation entre les significations émergeant des activités avec l'artefact et les significations mathématiques évoquées. Une tâche de *construction* consiste à :

- Produire une figure dynamique qui devrait être stable par déplacement ;
- Rédiger une description de la procédure utilisée pour obtenir la figure dynamique et produire une validation de cette procédure.

Ainsi, une tâche de construction se compose de deux types de consignes. La première demande une interaction avec l'artefact finalisée par la production du dessin d'une figure, la seconde demande la rédaction d'un texte faisant référence à la procédure de dessin. La demande de validation de la procédure acquiert son sens par rapport à l'EGD : le problème de construction est résolu si la figure obtenue à l'écran passe le test de déplacement. Mais, valider une telle construction signifie expliquer et comprendre la raison pour laquelle elle passe le test de déplacement.

Dans le cadre de la TMS, le développement d'une perspective théorique par les élèves peut être montré par l'évolution de la signification donnée au terme « construction ». Au début, le mot « construction »

avec l'ensemble de ce qui n'est réalisable qu'avec la règle et le compas. Voir Stylianides et Stylianides (2005) pour une discussion complète.

n'a de sens que par rapport à l'utilisation d'outils particuliers pour dessiner une figure. Dans l'environnement dynamique, le mot change son signifié en s'enrichissant d'une signification particulière : *la figure est construite en utilisant les outils disponibles et passe aussi le test de déplacement*.

Plus tard, le terme construction acquiert le sens théorique (Mariotti, 2001) de construction géométrique validé par une preuve au sein d'une théorie géométrique, c'est-à-dire validé par une démonstration. En d'autres termes, l'évolution des significations, en tant qu'elle peut apparaître dans l'évolution des signes employés, soit dans les réponses données, soit dans le discours développé au cours d'une discussion mathématique menée par l'enseignant, se produit à travers l'élaboration d'une correspondance entre certains outils de l'EGD et leurs modes d'utilisation d'une part, et les axiomes euclidiens et les théorèmes et définitions dérivés, d'autre part. Élaborer cette correspondance constitue l'objectif de la séquence didactique et s'articule dans des étapes fondées sur une organisation particulière de l'EGD.

Tout au début, à partir d'un menu vide, les élèves sont invités à discuter du choix des outils appropriés à introduire dans ce menu pour des activité de construction de triangles à partir de certaines données : angles et segments. Dans le même temps, un ensemble correspondant *d'axiomes* de construction est formulé et énoncé. Ils forment le premier noyau de la théorie de la géométrie ; à partir de ce moment, toute validation devra se référer à ce noyau de théorie.

Je tiens à souligner la puissance du potentiel sémiotique d'un EGD en ce qui concerne la possibilité de sélectionner les outils disponibles. En d'autres termes, le potentiel sémiotique que la modalité 'menu disponible' de l'artefact a par rapport à la signification mathématique de la théorie et, en particulier, par rapport à la propriété d'une théorie de choisir ses propres principes et de se développer en ajoutant de nouveaux théorèmes et définitions ; ces propriétés sont cruciales pour comprendre la structure hypothétique-déductive de toute théorie mathématique. Comme montré par ailleurs, les résultats tirés d'un certain nombre d'expériences d'enseignement (Mariotti, 2000) mettent en évidence comment les élèves vont produire de nouveaux énoncés et leurs démonstrations, si bien que l'on peut parler de véritables théorèmes produits par les élèves. En fait, au même moment, ils vont également prendre conscience de la théorie dans laquelle les preuves s'inscrivent. Au fil de la résolution de nouveaux problèmes et de la production de nouvelles constructions, les théorèmes correspondants peuvent être validés, ajoutés à l'ensemble des principes partagés et rapportés dans les cahiers personnels des élèves. Ainsi, les élèves participent à deux processus d'évolution parallèles : l'élargissement du menu disponible dans l'EGD et le développement correspondant d'une théorie de la géométrie. Ce développement sera noté par chaque élève, dans son propre cahier de géométrie.

En résumé, un EGD offre un contexte riche et puissant pour initier les élèves à une perspective théorique. Il fournit un environnement pour les expériences phénoménologiques des significations mathématiques :

- Des axiomes, qui correspondent à l'utilisation d'outils spécifiques de construction ;
- Des théorèmes géométriques qui valident des constructions géométriques spécifiques ; des actions métathéoriques, liées au développement de la théorie et consistantes en ajoutant de nouveaux théorèmes et définitions, qui correspondent à ajouter des nouveaux outils de construction à l'EGD.

Les expériences en classe au cours de nos expériences d'enseignement ont confirmé à la fois le déploiement du potentiel sémiotique et l'évolution d'un sens de la démonstration, comme sens entrelacé entre preuve et théorie. Différents aspects de cette évolution sont présentés et discutés dans plusieurs articles (Mariotti, 2001, 2007, 2009). Les deux extraits suivants sont des exemples de nos résultats qui montrent le sens théorique de la construction et sa relation avec le sens mathématique du théorème, ainsi qu'avec les outils disponibles à chaque étape.

3.4. Exemple : théorème de la bissectrice

Cet exemple, extrait de la collection des productions des élèves, montre la réponse d'un élève à la tâche de construction de la bissectrice d'un angle donné en utilisant uniquement certains outils d'un EGD, à savoir : la ligne, le rayon, le segment et le compas (point, segment). La classe avait déjà discuté de la correspondance entre l'utilisation de ces outils et les trois critères classiques de congruence qui, à ce moment-là, constituait le germe de la théorie disponible.

Extrait 1

Max produit une image, stable au déplacement, avec la liste des étapes de construction. Puis, il écrit :

Démontrer que la bissectrice d'un angle par construction est une bissectrice par critère de congruence (*ita. criterio di uguaglianza*)

AB = AC par cercle
AO est en commun
OB = OC par cercle centre C et B

Les deux triangles sont égaux en raison du troisième critère de congruence (Δ ABO = Δ AOC)

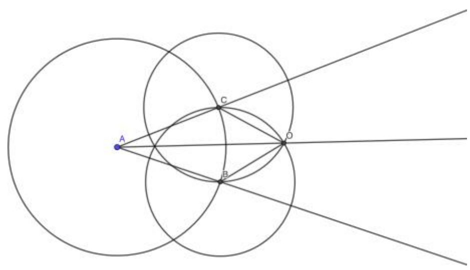

Figure 1. – La construction de Max

Des côtés égaux correspondent à des angles égaux et donc < OAC = < BAO
AO est la bissectrice de l'angle BAC

Comme il fallait le démontrer.

Du point de vue des mathématiques, ce texte est encore très approximatif, imprécis. Cependant, il est possible de reconnaître le germe d'une démonstration et, globalement, de voir comment l'étudiant relie explicitement les étapes de construction aux éléments théoriques disponibles. Ce qui est particulièrement significatif, c'est le fait qu'au début du texte de la preuve, l'élève sent la nécessité d'expliciter la tâche (« Démontrer que la bissectrice d'un angle… »). Cela montre le besoin d'anticiper l'interprétation du texte de la preuve, en particulier, l'interprétation de la liste des énoncés théoriques en termes de (se référant à) la construction.

Extrait 2

Après une première séquence d'activités, l'enseignant a ouvert une discussion collective dans le but de réviser les cahiers personnels des élèves. À partir d'une comparaison des cahiers, l'enseignant a ensuite guidé une discussion mathématique sur l'ordre de la séquence des éléments théoriques et sur le bon statut qu'il fallait leur donner : s'agit-il d'axiomes, de théorèmes ou de définitions ? Après la discussion, chaque élève a été invité à rédiger un rapport sur l'activité.

Au cours de la discussion, un certain temps a été consacré à la construction de la bissectrice d'un angle et à la preuve du théorème correspondant, le *théorème de la bissectrice*. Différentes preuves ont été proposées sur la base de l'application de différents théorèmes, et leur acceptabilité a été questionnée. Des traces de cette partie de la discussion peuvent être retrouvées dans le rapport des élèves entre eux. Celui-ci, écrit par Stefano, est remarquable :

> Nous sommes ensuite passés à l'examen de la preuve du théorème de la *bissectrice*. Un de mes camarades de classe a déclaré que le théorème de la *bissectrice* pouvait également être prouvé avec le triangle isocèle, mais pour ce faire, nous aurions eu besoin d'avoir le dernier théorème concernant la perpendiculaire. Si je dis que même en ayant le théorème, nous ne pouvions pas l'utiliser, cela ne signifie pas que nous sommes stupides, mais simplement que lorsque nous avons commencé [la preuve], nous ne l'avions pas, et nos moyens de prouver étaient moins puissants.

En fait, Stefano montre comment il a saisi le sens de la théorie comme un système d'énoncés logiquement ordonné, mais aussi la relation entre vérité et validité théorique. En commentant l'intervention de l'un de ses camarades de classe, Stefano déclare explicitement la nécessité d'une preuve qui doit se référer à la théorie disponible au moment de la donner.

4. En savoir plus sur le potentiel sémiotique d'un EGD

Dans cette section, je vais élaborer un peu plus sur le potentiel d'un EGD par rapport à la notion de théorème mathématique. En particulier, je considère le potentiel sémiotique offert par le déplacement par rapport à la troisième composante du théorème, c'est à dire l'énoncé.

Au moment de fournir une preuve, des difficultés surgissent souvent dans l'interprétation de l'énoncé donné. Ces difficultés concernent le sens respectivement de prémisse et de conclusion, ainsi que la signification de la dépendance logique entre elles. Des études ont été consacrées à cette question et montrent comment le point de vue de la sémantique peut être relevant dans l'analyse des difficultés de construction des démonstrations dans le cas d'énoncés contenants des quantificateurs logiques.

> [the] semantic point of view is relevant for analyzing difficulties in constructing proofs involving several quantifiers. In particular, this approach is useful for analyzing proofs in which statements of type ''For all x, there exists y, such that P(x, y)'' are used, or are to be proved (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, 2005). (Durand-Guerrier, 2008, p. 379)

Un autre cas intéressant est celui du travail de Selden et Selden (1995) qui ont discuté du phénomène spécifique que les auteurs appellent *unpacking an informal statement*, que nous pouvons traduire avec « déplier la structure logique d'un énoncé informel ». Cela fait référence au défi auquel les élèves sont souvent confrontés de rendre explicites les éléments formels – par exemple, les quantificateurs logiques – qui restent implicites dans la formulation de l'énoncé. Cette difficulté a un parallèle dans les défis auxquels les élèves sont confrontés lorsqu'on leur demande de formuler une conjecture sous la forme d'un énoncé conditionnel – « si … alors… » (Boero *et al.*, 1999 ; Durand-Guerrier, 2003 ; Deloustal-Jorrand, 2009). L'incapacité à gérer la conditionnalité et à saisir le statut différent des prémisses et des conclusions peut être un véritable obstacle au développement du sens correct de théorème. Développer la signification mathématique d'un énoncé conditionnel peut donc être considéré comme une question cruciale dans le contexte général du développement de la signification de théorème.

Dans la littérature actuelle, il existe une opinion commune sur le rôle fondamental que jouent les problèmes ouverts et les activités de conjecture dans le développement d'un sens de la preuve et la promotion d'une relation productive entre les processus d'argumentation *spontanés* et la validation *théorique* (Arsac et Mante, 1983 ; Arsac, 1992 ; Pedemonte, 2002). Différents contextes permettent des questions ouvertes de différentes manières, offrant ainsi différents potentiels pour poser et résoudre des problèmes ouverts et, par conséquent, pour formuler des conjectures. Dans la section suivante, je me concentre sur les tâches de conjecture dans le contexte très particulier de la géométrie dynamique et j'illustre le potentiel sémiotique de modalités particulières de déplacement, effectuées en résolvant des tâches de conjecture dans le contexte d'un EGD.

Des études antérieures, menées par Boero et ses collègues, se sont concentrées sur différents aspects de l'expérience des élèves, et ont montré à quel point les aspects dynamiques des phénomènes étudiés étaient fondamentaux. Ces études ont confirmé ce que d'autres études affirmaient (Simon, 1996 ; Harel et Sawder, 1998) : des aspects dynamiques semblaient favoriser les processus mentaux transformationnels qui sont essentiels à la production d'énoncés conditionnels. La formulation d'une conjecture peut être décrite comme une *cristallisation* d'une exploration dynamique dans un énoncé conditionnel. En fait, pendant une exploration dynamique, le solveur produit une conjecture quand il saisit un moment précis et une position spécifique, lorsque l'occurrence d'un fait a pour conséquence l'occurrence d'un autre fait (Boero *et al.*, 1996 ; Boero *et al.*, 1999 ; Boero *et al.*, 2007). Il est donc raisonnable d'aborder le rôle des différentes modalités de déplacement dans la production de conjectures, et d'envisager les potentialités de problèmes ouverts de conjecture dans un EGD.

4.1. Conjecturer dans un EGD : le déplacement comme médiateur sémiotique de la conditionnalité

J'utilise l'expression *problème ouvert de conjecture* dans ce qui suit pour désigner une tâche qui à partir d'un problème ouvert, demande explicitement de formuler une conjecture (Mariotti, 2014). Il s'agit d'un cas très courant en géométrie et implique de demander à l'élève de formuler un énoncé conditionnel exprimant une dépendance logique éventuelle entre les propriétés géométriques d'une configuration donnée. Dans un EGD, on peut s'attendre à des explorations préliminaires qui impliquent, d'une part, la construction d'une figure dynamique mettant en œuvre les propriétés qui caractérisent la configuration initiale et, d'autre part, des transformations actives de la figure à la recherche d'une régularité possible. Cela signifie que tout en observant l'image dynamique à l'écran, l'élève doit interpréter géométriquement les données perceptuelles provenant de l'écran, il doit saisir des relations invariantes entre les propriétés géométriques de la figure dynamique et les transformer dans un énoncé exprimant une relation conditionnelle entre elles. Au-delà de la complexité du processus d'interprétation des invariants perceptuels en termes géométriques (Mariotti et Baccaglini-Frank, 2018), la formulation d'une conjecture demande de reconnaître le lien d'implication entre les différentes propriétés géométriques que l'on a reconnues sur l'écran.

Plusieurs études réalisées sur les processus d'exploration accomplis par des élèves, montrent à la fois différentes modalités de déplacement et le potentiel de ces modalités pour supporter le processus de production d'une conjecture (Arzarello *et al.*, 2002 ; Olivero, 2003 ; Hölzl, 1996 ; Leung et Lopez-Real, 2002, 2006). En développant ces résultats, il est possible de décrire le potentiel sémiotique de modalités de déplacement particulières, par rapport à la signification mathématique d'*énoncé conditionnel* dans un contexte géométrique. Chaque modalité de déplacement peut être considérée comme un artefact spécifique, utilisé pour résoudre un problème ouvert de conjecture, tandis que les différents significations, émergeant de leur utilisation, peuvent être liées aux significations mathématiques, respectivement, de prémisse, de conclusion et de dépendance logique entre elles. Essayons donc d'analyser, plus en détails, les significations qui peuvent émerger de l'utilisation des différents modes de déplacement.

4.2. Invariants par déplacement et leur relation

La notion *d'invariant* par déplacement est au cœur de tout EGD. Comme indiqué ci-dessus, lorsqu'une figure est utilisée, deux types de propriétés apparaissent simultanément comme invariants : celles énoncées par les commandes utilisées dans la séquence des pas de construction et toutes les propriétés dérivées de celles-ci dans la théorie de la Géométrie Euclidienne. Cela signifie qu'une relation spécifique *entre invariants* est préservée par déplacement, et c'est cette relation, invariante elle-même, qui correspond à la validité d'une implication logique entre les propriétés d'une figure géométrique. Reconnaitre cette relation entre invariants devient, alors, un élément crucial lors de la résolution d'un problème ouvert de conjecture.

En raison de leur simultanéité, il peut être difficile de garder le contrôle de la hiérarchie logique entre les différents invariants qui apparaissent quand on déplace les points de base d'une figure. Néanmoins, une analyse minutieuse du mouvement des différents éléments peut aider et une asymétrie entre les deux types d'invariants peut se manifester (voir Mariotti, 2014). Au cours d'une exploration dynamique, l'utilisateur peut expérimenter la dépendance du mouvement grâce à une utilisation *consciente* de l'outil de déplacement. En effet, pendant l'exploration dynamique, deux mouvements différents se produisent et une analyse attentive permet de distinguer un premier mouvement, *le mouvement direct*, qui correspond à la variation d'un élément dans le plan sous le contrôle direct de la souris, et un deuxième mouvement – le mouvement *indirect* – qui correspond à la variation de tous les autres éléments résultants d'un mouvement direct. Cela permet de distinguer les *invariants directs* des *invariants indirects*, mais, en même temps, d'interpréter leur relation dynamique en termes de conséquences logiques entre les propriétés géométriques, et éventuellement de l'exprimer comme un énoncé conditionnel qui relie une prémisse et une conclusion.

Considérons le problème ouvert de conjecture suivant :

> Étant donné un quadrilatère et les milieux de ses côtés, que pouvons-nous dire du quadrilatère qui a ces milieux comme sommets.

Une fois le quadrilatère et ses milieux construits, les explorations des configurations possibles rendent évidente l'émergence de nouvelles propriétés concernant à la fois le parallélisme et l'égalité entre les côtés du nouveau quadrilatère. Cela peut conduire à la conjecture (théorème de Varignon) :

> « Étant donné un quadrilatère et les milieux de ses côtés, le quadrilatère qui a ces milieux comme sommets est un parallélogramme. »

La distinction entre mouvement direct et mouvement indirect nous a permis une nouvelle interprétation de certains des résultats classiques sur différentes explorations après les différentes modalités de déplacement (Baccaglini-Frank et Mariotti, 2010). Parmi ces déplacements, la modalité précédemment décrite comme *Lieu muet dragging* (ou *Dummy locus dragging),* mérite une l'attention particulière. Cette modalité consiste à déplacer une configuration avec l'intention de conserver une propriété spécifique ; c'est-à-dire réaliser « un mouvement contraint, nous dirons vinculé, de la configuration d'origine » *comme si* une propriété spécifique était *invariante.* Ce type d'invariant, nommé *Invariant indirectement induit* (*ibid*., p. 232), est la conséquence de la combinaison de toutes les propriétés données par la construction plus une nouvelle hypothèse correspondant au déplacement vinculé. En d'autres termes, *via* le déplacement vinculé, que nous appelons *Maintaining Dragging* (MD) (*ibid*, p. 230), une nouvelle propriété est ajoutée aux propriétés initiales. La production de la conjecture se conclut par l'identification de cette propriété. Communément, les mathématiciens se réfèrent à ce type de problème avec l'expression suivante : dans quelles conditions une certaine propriété se produit-elle ?

Ce qui est significatif ici, dans mon propos, c'est qu'en utilisant MD pour résoudre un problème ouvert de conjecture, l'élève peut contrôler directement et intentionnellement la distinction entre la propriété maintenue et la propriété recherchée, et ainsi en prendre conscience. Cette distinction correspond à la distinction entre prémisses et conclusion d'un énoncé conditionnel : la conclusion est la propriété que l'élève décide de maintenir, la prémisse est la propriété correspondant au mouvement contraint, tandis que la relation conditionnelle entre ces propriétés correspond à la simultanéité de leur occurrence.

Dans la perspective de la médiation sémiotique, les différentes modalités de déplacement, ainsi que les différents types d'invariants reliés à ces modalités, offrent un riche potentiel sémiotique par rapport à la notion mathématique de conjecture et en particulier à la signification mathématique d'un énoncé conditionnel en tant que relation logique entre des prémisses et une conclusion. L'asymétrie de la relation entre invariants offre la possibilité de distinguer le statut logique des propriétés d'une figure EGD ; c'est-à-dire leur statut de prémisse ou de conclusion. Ainsi, selon l'analyse précédente, il est possible de décrire le potentiel sémiotique selon les différentes modalités de déplacement dans la résolution d'une tâche de production de conjectures, par rapport à la signification mathématique de la conditionnalité. En synthèse, le potentiel sémiotique est reconnaissable à la présence des relations suivantes entre :

- L'invariant indirectement induit (la propriété que l'élève entend atteindre) et la signification mathématique de la conclusion de l'énoncé de conjecture,

- L'invariant contraint par le mouvement spécifique orienté vers le but (la propriété qui doit être assurée pour obtenir l'invariant induit) et la signification mathématique de prémisse de l'énoncé de conjecture,
- La sensation haptique de causalité reliant les mouvements direct et indirect et la signification mathématique de la dépendance logique entre la prémisse et la conclusion.

Les résultats de plusieurs études montrent comment différentes significations liées à la notion de conjecture peuvent émerger et comment les différents types d'invariants peuvent être caractérisés par leur statut spécifique dans l'activité d'exploration. Ces résultats peuvent être utilisés par les enseignants pour exploiter le potentiel sémiotique du déplacement et plus particulièrement de la modalité MD (voir Baccaglini-Frank et Mariotti, 2009, 2010 ; Baccaglini-Frank *et al.*, 2009).

5. Des figures impossibles et la preuve par contradiction

Dans les sections précédentes, j'ai discuté d'aspects spécifiques du potentiel didactique d'un EGD pour initier les élèves aux théorèmes mathématiques. Dans cette section, je me concentre sur le potentiel offert par un EGD pour un type particulier de preuve, c'est-à-dire la preuve indirecte[6] et notamment la preuve par contradiction. Avant de montrer des exemples, je présente une brève description d'un modèle mis au point pour éclaircir la complexité de la preuve indirecte.

Compte tenu *d'un énoncé* principal, il y a deux niveaux auxquels une preuve indirecte se développe : le niveau *théorique* et le niveau *métathéorique.* Le tout début du processus de preuve consiste en un passage à un nouvel énoncé caractérisé par de nouvelles prémisses. Il est généralement introduit par l'affirmation : commençons par nier la conclusion. Nous appelons le nouvel énoncé, *énoncé secondaire.* Ce nouvel énoncé n'est pas encore complet, il est lié à l'énoncé principale par le fait que sa prémisse inclut la négation de la conclusion de l'énoncé principale.

Puis, on va développer une démonstration de l'énoncé secondaire jusqu'au point d'obtenir une contradiction (une absurdité)… et voilà, l'énoncé secondaire est complet : la contradiction constitue sa conclusion. En tous cas, la démonstration donnée – la seule vraiment reconnaissable dans le processus de preuve – donne la validation de l'énoncé secondaire, et elle le fait par une preuve déductive directe. En même temps, une fois atteinte l'évidence de l'absurdité, la démonstration de l'énoncé principal est déclarée terminée.

La relation entre la validation de l'énoncé secondaire et la démonstration attendue de l'énoncé principal est généralement tenue pour acquise – communément ratifiée par l'affirmation générique « ce qu'il fallait démontrer ». Cependant, après avoir prouvé l'énoncé secondaire, quelque chose reste irrésolu, comme l'explique clairement Leron :

> Formally, we must be satisfied that the contradiction has indeed established the truth of the theorem (having falsified its negation), but psychologically, many questions remain unanswered. What have we really proved in the end? What about the beautiful constructions we built while living for a while in this false world? Are we to discard them completely? And what about the mental reality we have temporarily

[6] Une preuve indirecte d'un énoncé conditionnel, consiste à prouver que de la conjonction de la prémisse et de la négation de la conclusion on peut déduire une contradiction.

> created? I think this is one source of frustration, of the feeling that we have been cheated, that nothing has been really proved, that it is merely some sort of a trick–a sorcery–that has been played on us.
> (Leron, 1985, p. 323)

Le point crucial réside dans l'affirmation laconique finale : « ainsi le théorème est démontré ». La validation de l'énoncé principal se situe au niveau métathéorique et se condense dans un méta-théorème reliant la validation de l'énoncé secondaire à la validation de l'énoncé principal. Mais rien de tout cela n'apparaît dans le texte de la preuve. Ce qui manque, c'est quelque chose qui pourrait combler la distance entre la validation de l'énoncé principal et la conclusion absurde résultant de la preuve de l'énoncé secondaire.

Avec le but d'une part, de clarifier la source de ces difficultés pour les élèves et de l'autre, d'explorer si et comment un EGD peut offrir un support pour les franchir, les investigations se sont concentrées sur l'analyse du processus de résolution des problèmes ouverts dans un EGD (Mariotti et Antonini, 2010 ; Baccaglini-Frank *et al.*, 2016).

5.1. Déplacement et l'exploration des figures impossibles

L'apparition de configurations contradictoires ou impossibles est l'un des éléments critiques de la production d'une preuve indirecte. Il est possible d'imaginer et de concevoir des figures géométriques qui possèdent des propriétés contradictoires, par exemple en déformant le dessin papier-crayon pour les représenter. Au contraire, dans un EGD, ceci n'est pas possible car il n'est pas possible de représenter une figure dynamique qui présente des invariants contradictoires avec le modèle géométrique théorique sous-jacent. Toutes les figures sont correctes dans le sens où elles respectent la relation de dépendance entre les propriétés construites et les propriétés dérivées géométriquement : toutes et seules les propriétés construites et dérivées, seront observables en tant qu'invariants par déplacement. Il n'est donc pas possible d'avoir une figure dynamique qui représente une configuration contradictoire et ce phénomène a des conséquences intéressantes. Des comportements remarquables sont décrits pendant l'exploration d'un problème ouvert dans un EGD lorsque la solution de la tâche de conjecture implique des figures impossibles.

Dans le cas des figures dynamiques, Leung et Lopez-Real (2002) ont introduit la notion de *pseudo-objet* pour désigner une figure sur laquelle l'utilisateur force une hypothèse afin qu'elle soit « biaisée avec un sens supplémentaire ». Cette figure biaisée, affirment-ils, existe comme une sorte d'objet hybride entre la représentation visuelle-vraie (une représentation virtuelle du monde euclidien) et une interprétation pseudo-vraie (*ibid.*, p. 22).

Ils montrent comment l'objectif de rétablir l'harmonie entre les aspects figuratifs et théoriques (Fischbein, 1993) peut aider non seulement à sortir d'une impasse possible, mais aussi à construire l'argument fournissant l'étape manquante pour valider la fausseté d'une hypothèse (Antonini et Mariotti, 2008). Le lien entre prémisses et conclusions, exprimé par la relation entre les propriétés invariantes observées à l'écran après avoir fait bouger une figure, peut *rendre visible* la raison pour laquelle la configuration visée est impossible, et ainsi contribuer à combler l'écart (logique) entre la conclusion contradictoire, atteinte par la preuve de l'énoncé secondaire, et la validation de l'énoncé principal qui était le but original. Dans un EGD, l'utilisateur est porté à interpréter la figure construite comme représentant simultanément des propriétés potentiellement contradictoires dans la théorie euclidienne, en même temps qu'il est induit à concevoir un pseudo-objet. C'est ainsi qu'un pont potentiel peut être réalisé entre l'énoncé principal et la conclusion contradictoire atteinte.

Dans ce qui suit, je montre quelques résultats de notre recherche en classe, *via* deux cas exemplaires. Ils se réfèrent à deux formulations différentes d'un problème ouvert, toutes les deux demandent une conjecture susceptible d'être soutenue par un argument indirect, sollicitant par conséquent une preuve indirecte.

5.2. Exemple 1 : le cas de Paolo et Riccardo

Le premier cas concerne la tâche suivante :

> Que peut-on dire de l'angle formé par deux bissectrices dans un triangle ?

L'exploration des configurations possibles peut amener l'élève à considérer le cas de l'orthogonalité entre deux bissectrices, et à la conjecture que ce cas est impossible. Parmi les protocoles de résolution des processus recueillis dans nos études (Mariotti et Antonini, 2009), nous avons trouvé des exemples d'arguments indirects conduisant à une conclusion contradictoire. L'exemple suivant est tiré de l'entretien avec deux lycéens (12^{e} année), Paolo et Riccardo.

Dans la première partie de l'exploration, Paolo et Riccardo considèrent le cas dans lequel l'angle entre les bissectrices est un angle obtus. Ils excluent ensuite cette possibilité et passent à l'examen du cas de l'orthogonalité.

> 61 P : Quant à 90 [degré], il faudrait que […] K/2=45, H/2=45 (Figure 2) […]
> 62 I : En fait, il suffit que […] K/2 + H/2 soit 90.
> R : Oui, mais ce n'est pas possible.
> P : Oui, mais cela voudrait dire que K+H est… un carré […]
> R : Il devrait sûrement s'agir d'un carré ou d'un parallélogramme
> P : (K-H)/2 signifierait que […] K+H est à 180 degrés…
> R : Ce serait impossible. Exactement, j'aurais avec ces deux angles déjà 180, que ce n'est sûrement pas un triangle. […]
> 71 R : Nous pouvons exclure que [l'angle] soit [droit] parce qu'il deviendrait un quadrilatère. […]
> 81 R : [l'angle] n'est pas de 90 degrés parce que j'aurais un quadrilatère, en fait la somme des deux angles serait déjà de 180, sans le troisième angle.
> Ensuite, le seul cas possible est que j'ai un quadrilatère, c'est-à-dire que la somme des angles est de 360.

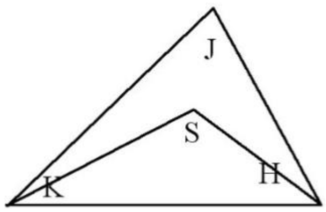

Figure 2. – Figure de Paolo et Riccardo

En utilisant un argument adductif, implicitement basé sur le théorème sur la somme des mesures des angles d'un triangle, Paolo et Riccardo arrivent à la conjecture : (62) *il suffit que […] K/2 + H/2 soit 90.* Mais Riccardo reconnaît l'impossibilité de cette condition (63), immédiatement suivi par Paolo qui identifie une conséquence immédiate de la configuration : *cela signifierait que K + N est…* En réalisant l'absurdité, il cherche une interprétation figurale de la conclusion absurde qui induit l'idée de l'adaptation de la figure : (65) ça *devrait sûrement être un carré,* … La fausseté de l'hypothèse originale est maintenant acceptable *parce qu'elle porterait sur un quadrilatère,* c'est-à-dire pas sur un triangle. Plus précisément, une nouvelle interprétation de l'image à l'écran est réalisée qui remplit les propriétés données, mais conduit également à une nouvelle conclusion permettant aux élèves de surmonter la conclusion contradictoire précédente. Cette nouvelle interprétation donne du sens à la contradiction et ouvre au développement d'un argument indirect.

Ce protocole montre la dynamique d'un pseudo-objet : l'apparition initiale d'une figure impossible est supplantée par l'image d'un carré, immédiatement généralisée en parallélogramme. Cette nouvelle image répond au malaise de l'absurde sans en annuler l'origine.

En raison de sa nature de pseudo-objet – représentant une relation contradictoire et susceptible de se transformer en une représentation cohérente – la figure dynamique sur laquelle agit l'élève a le potentiel, d'une part, d'offrir un soutien à la preuve de l'énoncé secondaire et d'autre part, de maintenir la relation entre l'énoncé secondaire et l'énoncé principal.

Selon le modèle ci-dessus, l'énoncé secondaire « Si l'angle entre les bissectrices est droit, alors la configuration devient un quadrilatère » peut être interprété comme « Il n'est pas possible que l'angle entre les bissectrices soit droit car sinon le triangle deviendrait un quadrilatère ». Cette interprétation permet à l'élève de relier l'énoncé secondaire à l'énoncé principal.

5.3. Exemple 2 : le cas de Stefano et Giulio

Considérons maintenant le deuxième cas, tiré également de notre étude (Baccaglini-Frank *et al.*, 2013). La structure du problème est encore un problème ouvert de conjecture, mais le texte demande explicitement de produire une construction géométrique, ou une explication dans le cas d'une réponse négative. La consigne est la suivante :

> « Est-il possible de construire un triangle avec deux bissectrices perpendiculaires ? Si c'est le cas, fournissez les étapes d'une construction. Si ce n'est pas le cas, expliquez pourquoi. »

Dans l'exemple suivant, semblable à ce qui s'est passé dans le cas précédent, nous pouvons observer comment l'émergence d'un pseudo-objet peut être liée à une première prise de conscience de l'impossibilité d'une construction. Cependant, nous pouvons également observer le rôle joué par la figure de l'EGD dans cette émergence. L'extrait est tiré de l'entretien avec deux lycéens (12e année), Stefano et Giulio.

> 1) Stefano : Non, le seul moyen est d'avoir des angles de 90 degrés… [pas clair quels sont les angles car il ne construisait pas la figure ou ne regardait pas l'écran]
> 2) Giulio : C'est un peu difficile pour un triangle ! [rires]… Ainsi… ils doivent être…
> 3) Stefano : Si les triangles ont 4 angles…
> 4) Giulio : Non, j'allais dire quelque chose de stupide…

Stefano déclare immédiatement qu'il n'y a qu'une possibilité. Certains éléments d'une configuration impossible sont mentionnés, puis les élèves passent rapidement à la construction d'une figure dans l'EGD. Giulio construit deux lignes perpendiculaires et les désigne comme les bissectrices du triangle (Figure 3a).

5) Stefano : Oui, ce sont des bissectrices, n'est-ce pas ?
6) Intervieweur : Oui.
7) Giulio : Donc, maintenant nous devons obtenir… bissectrices… comment pouvons-nous avoir un angle par rapport aux bissectrices ?
8) Giulio : l'image symétrique ?… Il suffit de faire la symétrie de celui-ci.

Les élèves ont construit une figure avec deux bissectrices robustes qui se croisent perpendiculairement (Figure 3a).

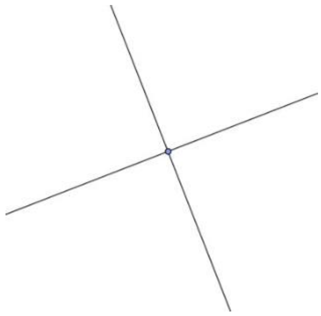

Figure 3a. – Construction des bissectrices par Giulio

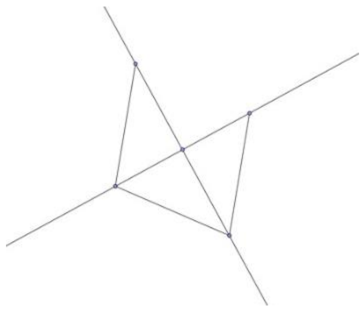

Figure 3b. – La figure achevée

9) Stefano : La seule chose, c'est que ce (Figure 3b) n'est pas un triangle !
10) Giulio : Par conséquent, nous pourrions maintenant faire comme ça ici [tracer les lignes à travers les points symétriques et les deux sommets dessinés du triangle]
11) Intervieweur : Oui.
12) Stefano : C'est que quelque chose d'atroce va en sortir !
13) Giulio : Et ici… théoriquement, le point d'intersection devrait être … les points… très petit détail… hmm
14) Stefano : Non, nous avons prouvé que ceci est égal à ceci [pointe vers des angles], et ceci est égal à cela parce que ce sont des bissectrices … ces deux sont égaux donc ils sont parallèles.
15) Stefano : Ces deux [se référant aux deux lignes parallèles] ont un trou donc ce n'est pas un triangle.

Les élèves utilisent l'EGD pour construire deux lignes perpendiculaires. Ensuite, la propriété d'être bissectrices est réalisée en construisant l'image symétrique d'un segment générique qui a chacune de ses extrémités sur une ligne différente. Une fois la construction terminée, il est possible d'observer les propriétés qui sont les conséquences (invariantes) de ces deux propriétés construites. Les élèves remarquent que « la figure n'est pas un triangle », la figure doit avoir deux angles égaux « donc avec deux côtés parallèles » (lignes 9 et 14) et, finalement, qu'il y a un « trou » dans ce qui devait être un triangle (ligne 15). Le pseudo-objet émerge. Il a une base comme un triangle devrait en avoir une, mais il y a aussi deux côtés parallèles comme dans le cas d'un parallélogramme. La figure projetée sur l'écran a la propriété « triangle » bien que ce ne soit clairement pas un triangle. Ce pseudo-objet montre aux élèves qu'il n'est pas possible de construire de manière robuste ce qu'on leur a demandé de construire, mais montre en même temps pourquoi ce n'est pas possible. Cette figure, en raison de sa nature de pseudo-objet, permet de relier l'énoncé principal « la construction demandée n'est pas possible » à l'énoncé secondaire absurde : « si les bissectrices sont perpendiculaires, alors le triangle est un quadrilatère ».

Nos recherches sur l'argumentation indirecte et les preuves indirectes produites par les élèves ont montré qu'elles peuvent être soutenues par l'exploration par déplacement, conduisant à percevoir ce que on peut appeler des pseudo-objets (Baccaglini-Frank *et al.*, 2013, p. 65). Néanmoins, l'efficacité de l'apparition d'un pseudo-objet pour déclencher un argument indirect est liée au contrôle logique de la figure dynamique. En d'autres termes, ce qui est essentiel, c'est la conscience de la signification logique de la figure dynamique – une conscience qui permet à l'élève en même temps de projeter sur elle les propriétés attendues et d'y reconnaître les conséquences des propriétés construites. Une telle interprétation logique de la figure dynamique permet de donner du sens à l'absurde et fournit un pont pour combler l'écart logique entre l'énoncé principal et l'énoncé secondaire qui contient cette contradiction.

Sur la base de ces résultats, il semble possible d'affirmer qu'un EGD offre un contexte approprié pour traiter la preuve indirecte parce que le déplacement pour produire une configuration impossible ou un pseudo-objet fournit un langage informel pour parler de l'absurde. Cela nous rappelle l'affirmation de Thompson :

> If such indirect proofs are encouraged and handled informally, then when students study the topic more formally, teachers will be in a position to develop links between this informal language and the more formal indirect-proof structure. (Thompson, 1996, p. 480)

Plus précisément, dans un contexte EGD, les problèmes ouverts qui demandent la construction de figures géométriquement impossibles peuvent jouer un rôle crucial dans le déploiement du potentiel sémiotique du déplacement par rapport aux significations mathématiques de la démonstration par l'absurde. De cette façon, ils contribuent à développer des significations liées à la preuve indirecte et favorisent l'acceptabilité de cette modalité de preuve.

6. Conclusions

La recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a montré la complexité pour les élèves de s'approprier le sens de la preuve, de la nécessité d'en fournir un et, plus généralement, d'introduire une perspective théorique dans les mathématiques scolaires alors qu'elle est au cœur des mathématiques. L'apparition et le développement de nouveaux dispositifs technologiques ont ouvert de nouvelles voies de recherche et posé des questions cruciales sur les possibilités et les défis de soutenir soit l'introduction de la preuve dans la pratique de classe, soit la transition de la preuve informelle vers la preuve formelle en mathématiques.

Dans cette contribution, j'ai sélectionné le contexte technologique spécifique d'un EGD et, en développant les résultats de mes recherches, j'ai discuté de son potentiel pour l'enseignement et l'apprentissage au niveau secondaire. J'ai utilisé la théorie de la médiation sémiotique pour encadrer le contexte éducatif et je me suis concentrée sur la notion de *potentiel sémiotique* pour décrire la relation entre l'utilisation de certains outils, disponibles dans un EGD pour accomplir des tâches spécifiques, et les significations situées attendues après leur utilisation incluant leur lien avec les significations mathématiques liées à la preuve ou, plus largement, à la notion de théorème mathématique que nous avons introduite. J'ai expliqué le potentiel sémiotique qui émergeait dans la résolution d'une tâche de construction et montré comment il se rapporte, d'une part, à la signification du dessin contrainte par l'utilisation d'outils spécifiques et, d'autre part, à la signification mathématique de prouver un énoncé dans un système de principes assumés et de théorèmes partagés, c'est-à-dire dans une théorie. L'exploitation de ce potentiel sémiotique s'offre aux enseignants comme un instrument de médiation pour soutenir les élèves dans la construction et l'entrelacement de différentes significations. Plus précisément, selon l'approche didactique proposée par la TMS, sur la base des significations qui émergent des activités spécifiques de construction dans un EGD, les enseignants peuvent guider la co-émergence de la signification mathématique de la preuve et de la théorie. Il n'était pas possible, dans la limite de cette présentation, de témoigner de cette partie du processus de médiation sémiotique géré par l'enseignante pendant la situation de discussion collective. Je renvoie à Mariotti, 2001, 2009 pour approfondir cette problématique.

Une analyse plus approfondie des modalités de déplacement a mis en évidence le potentiel sémiotique des problèmes ouverts de conjecture dans un EGD. Différentes modalités de déplacement peuvent être liées à différents types d'invariants et également aux différents états logiques des propriétés de l'objet géométrique représenté à l'écran. Certaines propriétés correspondent à la prémisse d'un énoncé et d'autres à la conclusion, tandis que leur simultanéité correspond à la relation logique entre elles. En d'autres termes, la signification mathématique d'un énoncé conditionnel peut être liée à la relation entre les éléments invariants spécifiques qui émergent dans l'exploration d'une configuration et l'intention de produire une conjecture.

D'autres potentiels sémiotiques du déplacement émergent dans la résolution de tâches de non constructibilité. Il a été montré que le potentiel sémiotique d'un pseudo-objet peut être lié à la signification mathématique de la preuve indirecte. Plus précisément, dans un EGD, une construction rigide combinée à un déplacement intentionnel et contrôlé, peut amener l'élève à percevoir que la figure dégénère en un pseudo-objet. La nature hybride des pseudo-objets semble soutenir le sens de la preuve indirecte en créant un pont entre l'énoncé principal à prouver et la configuration contradictoire émergeant de la preuve de l'énoncé secondaire.

En fait, l'exploration qui vise à saisir la conjecture peut devenir une sorte d'argumentation graphique : l'image soutenue par le déplacement qui montre les conséquences des propriétés construites permet de franchir la distance entre l'énoncé principale et la démonstration de l'énoncé secondaire, en fournissant une raison de l'apparition de l'absurde.

Au-delà de l'illustration du potentiel éducatif d'une technologie spécifique, la discussion précédente offre un aperçu de la complexité de la gestion productive de la résolution de problèmes dans un EGD. La stricte dépendance entre l'expérience d'agir *géométriquement* dans un EGD et le développement d'un réseau cohérent de significations mathématiques permettant un contrôle théorique sur ce qui est dessiné et déplacé à l'écran nous donne une clé pour interpréter à la fois la force et la fragilité de l'utilisation en classe des activités dans un EGD. Après tout, interpréter ses propres perceptions en termes de propriétés géométriques et de relations logiques entre elles n'est pas un processus spontané ou immédiat. Au contraire, le développement d'un œil théorique est le résultat d'un processus d'apprentissage complexe qui est inconcevable sans l'expertise d'un enseignant dans l'organisation didactique de la classe : la définition de tâches spécifiques et la gestion de la mise en commun des solutions proposées. C'est tout le travail didactique de l'enseignant pour achever la prise de conscience des élèves du lien entre leur expérience personnelle et leurs connaissances mathématiques.

Références

Antonini, S., et Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM - Mathematics Education*, *40*(3), 401–412.

Antonini, S., et Mariotti, M. A. (2010). Abduction and the explanation of anomalies: The case of proof by contradiction. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne et F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th ERME Congress* (p. 322-331), Lyon.

Arsac, G. et Mante, M. (1983). Des "problème ouverts" dans nos classes du premier cycle. *Petit x*, *2*, 5–33.

Arsac, G. (1992). *Initiation au raisonnement au collège*. Presse universitaire de Lyon.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in Geometry. In A. Olivier et K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME-XXII* (vol. 2, p. 24-31). Stellenbosch, South Africa.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., et Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66–72.

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century: from Hilbert to automatic theorem proving. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School from History and Epistemology to Cognitive and Educational Issues* (p. 43-64). Sense Publishers.

Arzarello, F. Bartolini Bussi, M.G., Leung, A.Y.L., Mariotti, M.A, et Stevenson, I. (2012) Experimental approaches to mathematical thinking: Artefacts and proof. In G. Hanna et M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (New ICMI Study Series, vol. 15, p. 1-10). Springer.

Baccaglini-Frank, A. (2010). Conjecturing in Dynamic Geometry: A Model for Conjecture-generation through Maintaining Dragging. *Doctoral dissertation*, University of New Hampshire, Durham, NH. Published by ProQuest.

Baccaglini-Frank, A. (2010b). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. In P. Brosnan, D. B. Erchick et L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the PMENA* (vol. VI, p. 607-615). Columbus, OH: The Ohio State University.

Baccaglini-Frank, A., et Mariotti, M.A. (2009). Conjecturing and proving in dynamic geometry: The elaboration of some research hypotheses. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne et F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th ERME Congress* (p. 231-240), Lyon.

Baccaglini-Frank, A., et Mariotti, M.A. (2010) Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253.

Baccaglini-Frank, A., et Mariotti, M.A. (2011). Conjecture-generation through Dragging and Abduction in Dynamic Geometry. In A. Méndez-Vilas (Ed.), *Education in a technological world: communicating current and emerging research and technological efforts* (p. 100-107). Formatex.

Baccaglini-Frank, A., et Mariotti, M.A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., et Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. In M. Tzekaki et H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME Conference* (vol. 2, p. 89-96). Thessaloniki, Greece: PME.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., et Mariotti, M. A. (2013). Reasoning by contradiction in dynamic geometry. *PNA, Revista de Investigaciòn en Didàctica de la Matemàtica*, 7(2), 63–73.

Baccaglini-Frank, A. et Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. In C. Csíkos, A. Rausch, et J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 43-50), Szeged, Hungary: PME.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., et Mariotti, M.A. (2016). Designing Non- constructabilityTasks in a Dynamic Geometry Environment. In A. Leung et A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks*, *Mathematics Education in the Digital Era 8* (p. 99-120). Springer.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., et Mariotti M.A. (2018). From pseudo-objects in dynamic explorations to proof by contradiction. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*, 87–109.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–76.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM - Mathematics Education, 40*, 501–512.

Bartolini Bussi, M. G., et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh et D. Tirosh, (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (p. 746-805). Lawrence Erlbaum.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, Ferri, F., et Garuti, R. (1999). Early approach to theoretical thinking: gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 67–87.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi et A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (p. 65–84). NCTM.

Boero, P., Garuti, R., et Lemut, E. (1999). About the generation of conditionality of statements and its links with proving. In O. Zaslavski (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 137-144). Haifa: PME.

Boero, P., Garuti, R., et Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (p. 249-264). Sense Publishers.

Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers.

Clements, D. H., et Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 420-464). Macmillan Publishing Co, Inc.

de Villiers M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer, et D. Chazan (Eds.), *New directions in teaching and learning geometry* (p. 369-393). Lawrence Erlbaum.

de Villiers, M. (2002). Developing Understanding for Different Roles of Proof in Dynamic Geometry, *Paper presented at ProfMat*, Visue, Portugal, 2-4 October 2002.

Dreyfus, T., et Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *28*(1), 1–5.

Deloustal-Jorrand, V. (2009). Des preuves écrites en géométrie pour travailler le concept mathématique d'implication en formation des professeurs. In M. Sokhna (Eds.), *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation, Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009* (p. 58–75). Dakar: EMF.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM -Mathematics Education, 40*, 373–384.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 5–34.

Durand-Guerrier, V., et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques ? Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295–342.

Durand-Guerrier, V., et Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 149–172.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233–261.

Duval, R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, *31*, 37–61.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (p. 138-162). Sense Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139–162.

Hadas, N., Hershkowitz, R., et Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in Dynamic Geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44* (1–3), 127–150.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics, 9*(1), 20–25.

Hanna, G. (1989a). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski et M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 45-51). Paris: PME.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 5–23.

Hanna, G., et Jahnke, H. N. (2007). Proving and Modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn et M. Niss (Eds.), *Applications and Modelling in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (p. 145-152). Springer.

Hanna, G., et De Villiers, M. (Eds.) (2012). *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study* (vol. 15). Springer Science et Business Media.

Harel, G., et Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schonfeld, J. Kaput, et E. Dubinsky E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III. Issues in Mathematics Education* (vol. 7, p. 234-282). American Mathematical Society.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometric relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara et M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME-XXIV* (vol. 1, p. 103-117). Hiroshima, Japan: PME.

Henry, P. (1993). Mathematical machines, in Hanken, H., Karlqvist, A. et Svedin U., *The machine as metaphor and tool* (p. 101-122). Springer-Verlag.

Herbst, P. G. (1998). *What works as a proof in the mathematics class*. Doctoral dissertation, University of Georgia. Dissertation Abstracts International, 59, 10A.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 283–312.

Hölzl, R. (1996). How does "dragging" affect the learning of geometry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, *1*(2), 169–187.

Hölzl R., Hoyles C. et Noss R. (1994). Geometrical relationships and dependencies in Cabri. *Micromath, 10*(3), 8–11.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/Schoolworlds: the transformation of an innovation. In C. Keitel, et K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (p. 203-221). Springer-Verlag.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V.S. Ageyev et S.M. Miller (Eds.), *Vygotskij's Educational Theory in Cultural Context* (p. 15-38). Cambridge University Press.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for a deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55–85.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environment as a source of rich learning context for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151–161.

Laborde, C. et Laborde, J.M. (1991). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. P. Ponte, J. F. Matos, et D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (p. 177-192). Springer-Verlag.

Laborde, J.M. et Strässer, R. (1990). Cabri-géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *90*(5), 171–177.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press.

Lebesgue, H. (1950). *Leçons sur les constructions géométriques*. Gauthier-Villars.

Leron, U. (1985). A Direct approach to indirect proofs. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(3), 321–325.

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment through the Lens of Variation.

International Journal of Computers for Mathematical Learning, *13*(2), 135–157.

Leung, A., et Lopez-Real, F. (2002). Theorem Justification and Acquisition in Dynamic Geometry: a Case of Proof by Contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7, 145–165.

Lopez-Real, F., et Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 665–679.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 25–53.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, *6*(3), 257–281.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez, et P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (p. 173-204). Sense Publishers.

Mariotti, M.A. (2007). Geometrical proof: the mediation of a microworld. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history epistemology and cognition to classroom practice* (p. 285-304). Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM - Mathematics Education*, *41*, 427–440.

Mariotti, M.A. (2010). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (p. 169-190). Springer.

Mariotti, M. A. (2015). Transforming Images in a DGS: The Semiotic Potential of the Dragging Tool for Introducing the Notion of Conditional Statement. In S. Rezat, M. Sebastian, A. Hattermann et Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A fundamental idea of mathematics education* (p. 155-172). Springer.

Mariotti, M.A., et Antonini, S. (2006). Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. In J. Novotná, H. Moraová, M.Krátká et N.Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME Conference* (vol. 2, p. 65-72). Prague: PME.

Mariotti, M.A., et Baccaglini-Frank A. (2018). Developing the Mathematical Eye Through Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. In N. Amado, S. Carreira et K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education*. Springer, Cham.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., et Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of PME-XXI* (vol. 1, p. 180-195). Lathi, Finland: PME.

Mariotti, M.A., et Cerulli, C. (2001). Semiotic mediation for algebra teaching and learning. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME-XXV* (vol. 3, p. 343-350). Utrecht, The Netherlands: PME.

Mariotti, M.A., et Maracci, M (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In G. Gueudet, et L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 91-107). Presses universitaires de Rennes et INRP.

Martin, G. E. (1998). *Geometric Constructions*. Springer.

Miyazaki, M., Fujita, T., et Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM - Mathematics Education*, *47*(7), 1–14.

Noss, R., et Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (vol. 17). Springer Science et Business Media.

Olivero, F. (2001). Conjecturing in open geometric situations using dynamic geometry: An exploratory classroom experiment. *Research in Mathematics Education*, *3*(1), 229–246.

Olivero, F. (2003). *Proving within dynamic geometry environments*. Doctoral Dissertation, Graduate School of Education, Bristol. https://telearn.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/190412/filename/Olivero-f-2002.pdf

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la demonstration en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23–41.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Reid, D. A. et Knipping, C., (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., et Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM - Mathematics Education*, *40*(3), 455–467.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Selden, J., et Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123–151.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education. Festschrift for Michael Otte* (p. 117-135). Springer.

Simon, M. A. (1996). Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(2), 197–209.

Sinclair, N., et Robutti, O. (2012). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry.In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick et F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (vol. 27, p. 571-596). Springer.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., et Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (p. 277-287). Springer, Cham.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., et Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 237-266). NTCM.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., et Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, et P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (p. 315-351). Sense Publishers.

Thompson, D.R. (1996). Learning and Teaching Indirect Proof. *The Mathematics Teacher, 89*(6), 474–482.

Vinner, S. (1999). The Possible and the Impossible. *ZDM - Mathematics Education, 99*(2), 77.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.