

Ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Jana Trgalová

Haute école pédagogique
du canton de Vaud, Lausanne

Depuis plusieurs décennies, les recherches en didactique de mathématiques interrogent la place et le rôle des technologies numériques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le développement de l'Internet qui a accru de manière significative la disponibilité et l'accessibilité aux ressources a donné une nouvelle orientation aux recherches avec l'émergence d'une approche « ressources » de l'éducation mathématique. Dans cet article, nous dressons, dans un premier temps, un panorama de recherches sur les technologies numériques aussi bien « anciennes » (logiciels de géométrie dynamique, de calcul formel, calculatrices graphiques et symboliques...) que plus récentes (technologie mobile, tactile, réalité augmentée ou virtuelle). Nous montrons comment le développement de ces recherches s'accompagne de l'émergence de nouveaux cadres et concepts théoriques pour aborder les problématiques spécifiques que soulèvent les usages du numérique. La seconde partie de l'article est consacrée aux recherches plus récentes portant sur les ressources numériques, leurs différentes conceptualisations et les problématiques concernant leur conception, diffusion, évaluation et appropriation.

Mots-clés : technologie numérique ; ressource numérique ; conception de ressources ; indexation

Digital resources for mathematics teaching and learning

For several decades, research in mathematics education has investigated the place and the role of digital technologies in the teaching and learning of mathematics. The development of the Internet which has significantly increased the availability and accessibility of resources has given a new direction to research with the emergence of a "resource" approach to mathematics education. In this article, we first draw up a panorama of research on digital technologies, both "old" (dynamic geometry software, computer algebra software, graphic and symbolic calculators, etc.) and more recent (mobile, tactile technology, augmented and virtual reality). We show how the development of this research is accompanied by the emergence of new theoretical frameworks and concepts to address the specific issues raised by the use of digital technology. The second part of the article is devoted to more recent research on digital resources, their different conceptualizations and issues concerning their design, dissemination, evaluation, and appropriation.

Keywords: digital technology; digital resource; resource design; indexation

Recursos digitales para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas

Durante varias décadas, la investigación en didáctica de las matemáticas ha cuestionado el lugar y el papel de las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El desarrollo de Internet, que ha aumentado significativamente la disponibilidad y accesibilidad de los recursos, ha dado una nueva dirección a la investigación con el surgimiento de un enfoque de "recursos" para la educación matemática. En este artículo ofrecemos en primer lugar una visión general de la investigación sobre tecnologías digitales, tanto "antiguas" (software de geometría dinámica, CAS (álgebra informática), calculadoras gráficas y simbólicas, etc.) como más recientes (tecnología móvil, tecnología táctil, realidad aumentada o virtual). Mostramos cómo el desarrollo de esta investigación va acompañado del surgimiento de nuevos marcos teóricos y conceptos para abordar las problemáticas específicas que suscitan los usos de la tecnología digital. La segunda parte del artículo está dedicada a investigaciones más recientes sobre los recursos digitales, sus diferentes conceptualizaciones y las problemáticas referentes a su diseño, difusión, evaluación y apropiación.

Palabras clave: tecnología digital; recurso digital; diseño de recursos; indexación

I. Introduction : des technologies aux ressources numériques

Cet article, relevant du thème des technologies numériques, est centré sur les ressources numériques pour plusieurs raisons. D'une part, les technologies sont aujourd'hui considérées comme un type particulier dans l'ensemble des ressources disponibles pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, comme le précisent Gueudet *et al.* (2009, p. 1046) :

An important issue, accounting for the introduction of the word "resources" in the name of a group which was previously called "tools and technologies in mathematical didactics", is the need for considering technologies within a range of resources available for the students, the teachers, teacher's trainers etc.

L'intérêt grandissant porté aux ressources dans les recherches en didactique des mathématiques a conduit au développement d'approches théoriques spécifiques pour étudier les interactions des enseignants avec des ressources, en particulier l'approche documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2008). Enfin, les ressources numériques sont devenues objets de nombreuses recherches, comme en témoigne le projet de "Handbook of digital (curricular) resources in mathematics education" (Pepin *et al.* 2023).

Cet article est organisé en deux parties. La première partie dresse un panorama de technologies numériques « anciennes » et plus récentes, de questionnements qu'elles ont fait émerger et de développements théoriques auxquels ces problématiques spécifiques ont conduit et dont elles se sont nourries. La seconde partie s'intéresse aux ressources numériques et passe en revue les diverses conceptualisations et problématiques, parmi lesquelles celles d'indexation et de conception sont plus particulièrement abordées.

2. Partie I : technologies numériques

Clark-Wilson *et al.* (2020) ont mis en évidence quatre principaux rôles des technologies numériques : (1) elles permettent de *soutenir l'organisation du travail de l'enseignant* – préparation de fiches élève ou suivi des élèves par exemple –, (2) elles *offrent de nouvelles manières de faire et de représenter les mathématiques*, (3) elles *soutiennent la connectivité, l'organisation en communautés, la communication et le partage de ressources*, et (4) elles *soutiennent le travail autonome des apprenants* – avec des tuteurs intelligents ou des exercices par exemple. Nous nous intéressons ici aux technologies remplissant la deuxième fonction qui sont appelées *logiciels d'analyse mathématique* par Pierce et Stacey (2010).

Dans cette catégorie, il y a des technologies « anciennes », telles que Logo, logiciels de géométrie dynamique ou de calcul formel, ou encore des calculatrices symboliques et graphiques, ainsi que des technologies plus récentes, telles que des technologies tactiles, mobiles, de réalité augmentée ou virtuelle. C'est à ces technologies qu'est dédiée la suite de cette section.

2.1. Logo

Logo, ou la tortue-logo, est surtout connu comme un langage de programmation créé par Seymour Papert dans les années 1960. Son développement repose sur un mode d'apprentissage inspiré des travaux de Piaget sur le développement cognitif de l'enfant qui s'oppose à l'enseignement programmé (Bruillard, 1997), en vogue à l'époque, appuyé par les théories behavioristes. Critique par rapport à l'enseignement des mathématiques scolaires qu'il considère comme transmettant « des contenus prédéterminés qui se présentent comme des solutions toutes faites à des problèmes déjà connus » (Barabé et Proulx, 2017, p. 26), Papert suggère de « placer (les élèves) dans des conditions favorables pour être curieux à propos des mathématiques, les explorer, et ainsi produire de nouvelles idées et questions, les discuter, etc. » (*ibid.*). L'informatique, et plus particulièrement la programmation, est un moyen d'engager les élèves dans des processus de création où ils vont être amenés à développer, non pas de simples connaissances, mais des manières mathématiques de penser (*mathematical ways of thinking*). L'utilisation de la programmation au service des apprentissages repose sur trois idées fondatrices : promouvoir l'ordinateur

- comme moyen d'expression, d'expérimentation et de création pour les élèves ;
- sous contrôle de l'élève ;
- en lui donnant la possibilité de le programmer.

C'est dans ce contexte que naît l'environnement de programmation Logo (Figure 1), doté d'une partie graphique où l'utilisateur peut interagir avec un objet (tortue) et d'une partie textuelle où il peut éditer le programme qui contrôle l'objet. Cet environnement, facile à utiliser grâce à un langage proche de la langue naturelle

ouvre la voie à l'exploration des mondes auxquels donne accès le langage. L'un de ces mondes est celui d'une géométrie pour laquelle il offre la possibilité d'une expérience mathématique par les voies de l'action, de la construction, du projet. (Balacheff, 2017, p. 385)

Il s'agit ainsi d'un premier micromonde dans lequel les élèves peuvent exprimer leurs idées et en explorer les conséquences. Le concept de micromonde est un élément de l'héritage légué par Papert à la communauté de chercheurs et concepteurs d'environnements informatiques pour l'apprentissage.

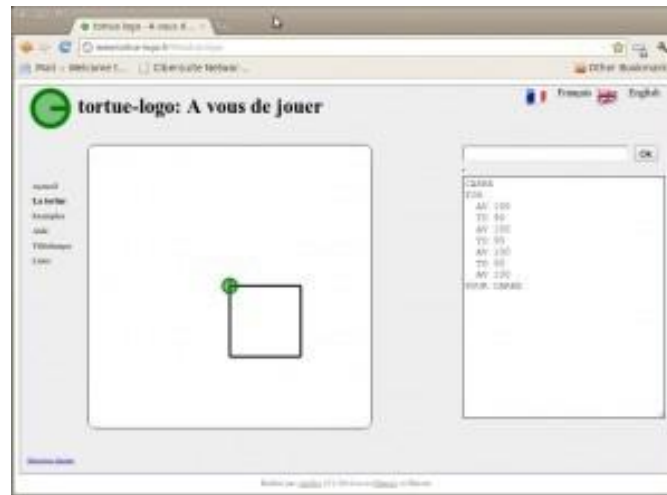


Figure 1. – Environnement de programmation Logo : partie graphique à gauche et partie textuelle à droite

Le constructionnisme est un autre concept « emblématique de l'œuvre de Seymour Papert » (*ibid.*). Inspiré des travaux de Piaget et de Levi-Strauss de qui il reprend respectivement les notions de *pensée concrète* comme mode de connaissance et de *bricolage intellectuel* comme source d'idées et de modèles pour améliorer l'habileté de faire et d'améliorer des constructions mentales (Papert, 1993), le constructionnisme pose « les principes de la conception d'environnements informatiques pour l'apprentissage et de leurs usages » (Balacheff, 2017, p. 389). Deux principes fondamentaux caractérisent le constructionnisme : l'apprentissage par l'expérience et par la création d'une part, et l'engagement dans une tâche de manière réflexive et sociale d'autre part.

Même si Logo n'a pas été conçu pour faire apprendre les mathématiques, les recherches montrent des effets indirects de l'utilisation de Logo sur le développement des connaissances mathématiques dus à trois raisons principales (Douglas et Sarama, 1997) :

- Logo permet la manipulation de l'incarnation (*embodiment*) de certaines notions mathématiques ;
- Il permet d'opérer une transition entre expériences concrètes et mathématiques abstraites ;
- Les élèves sont amenés à utiliser des notions mathématiques à des fins qui ont du sens pour eux.

Concernant l'accueil des idées de Papert, Balacheff (2017) en dresse un tableau mitigé, en particulier en ce qui concerne la France :

Le succès des idées de Seymour Papert fut mondial, tant sur le terrain de l'enseignement qui a vu fleurir nombre d'innovations que dans le monde académique qui s'est organisé et a mené de nombreux projets de recherche autour de Logo. [...] De fait, passé l'effet de séduction pédagogique et politique des années 80, les usages de LOGO tels que son créateur les concevait ne sont pas parvenus à s'imposer en France. Les raisons sont multiples, parmi elles à coup sûr la distance importante avec les pratiques et les programmes. La cohabitation de la géométrie LOGO avec celle des programmes n'allait pas de soi dans le cadre des contraintes institutionnelles. Plutôt que de la géométrie, LOGO a été le support privilégié des premiers apprentissages de la programmation. (Balacheff, 2017, p. 389)

Si, à l'époque, l'institution scolaire française a peiné à se saisir des idées de Papert, aujourd'hui ces dernières s'imposent avec force comme en témoigne l'introduction récente, à la rentrée 2009, de l'algorithmique et de la programmation dans les programmes de mathématiques.

Dans la lignée de Logo

Logo a été source d'inspiration pour des concepteurs d'environnements éducatifs, comme en témoignent d'autres micromondes qui ont depuis vu le jour. Citons en particulier les environnements de géométrie dynamique (présentés en détail plus loin), dont Cabri-géomètre développé parmi les premiers. Le courant de constructionnisme a donné lieu à des types de micromondes dits « mi-cuits » (*half-baked microworlds*) qui sont

pieces of software explicitly designed so that their users would want to build on them, change them or decompose parts of them in order to construct an artifact for themselves or one designed for instrumentation by others. (Kynigos, 2007, p. 336)

Si, à l'époque, les idées de Papert n'ont pas rencontré un franc succès, en particulier en France, l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation se situe clairement dans la lignée tracée par Papert il y a 40 ans. Les environnements de programmation par blocs (tels que Scratch, Figure 2) sont des descendants directs de Logo.

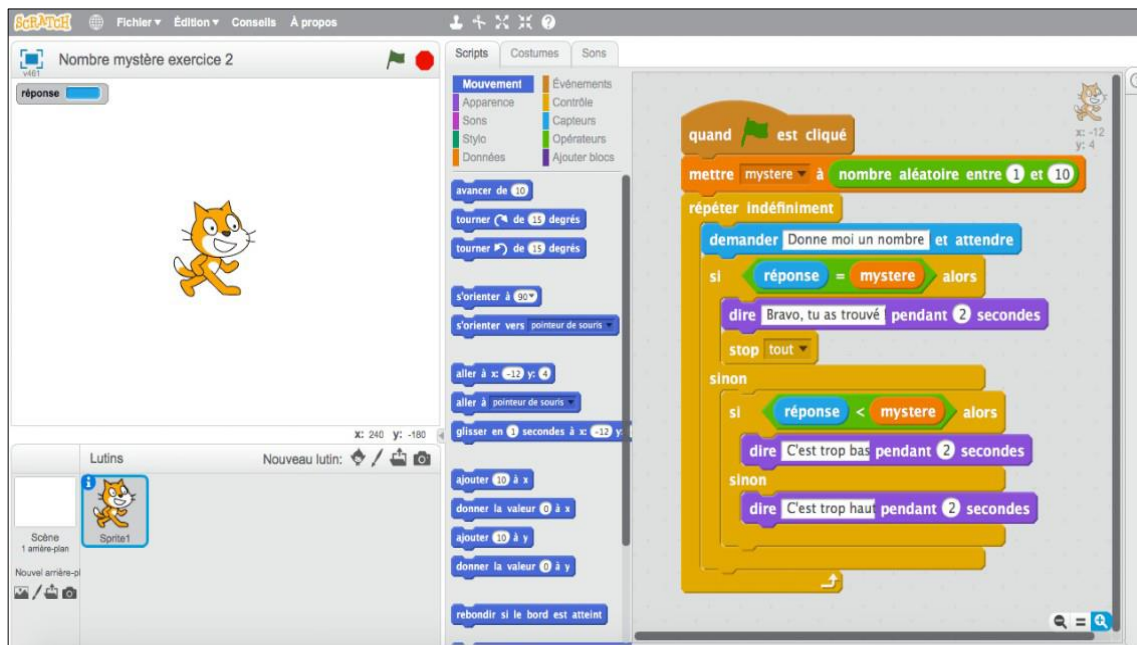


Figure 2. – Scratch, environnement de programmation par blocs

2.2. Géométrie dynamique

Le terme *géométrie dynamique* ou *géométrie interactive* désigne les nombreux environnements informatiques (micromondes) qui partagent les trois caractéristiques principales suivantes :

- La coexistence de *primitives de dessin pur* qui permettent de créer des objets géométriques de base tels que des points, des droites, des segments ou des cercles, et de *primitives géométriques* qui permettent de construire des objets géométriques à partir d'autres déjà créés, par exemple droite parallèle à une droite donnée passant par un point, médiatrice d'un segment ou figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite ou à un point ;
- La *manipulation directe* des diagrammes tracés sur l'écran ;
- La *préservation de propriétés géométriques* qui ont servi au tracé du diagramme lors du déplacement de ses éléments de base (Laborde et Capponi, 1994).

Cabri-géomètre (ou Cabri), l'un des premiers micromondes de géométrie dynamique développé dès les années 1980 (Laborde et Laborde, 2005), a donné lieu à de nombreuses recherches en didactique des mathématiques. Ces recherches s'inscrivent le plus souvent dans le cadre de la *théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998) en plein développement à cette époque. Ce cadrage théorique conduit naturellement à penser la construction de situations a-didactiques où Cabri est un élément constituant du milieu. Les premières recherches montrent les apports de logiciels de géométrie dynamique à l'apprentissage de la notion de figure géométrique qui désigne un objet théorique défini par ses propriétés géométriques (Laborde et Capponi, 1994). Deux phénomènes au moins contribuent à cet apprentissage. D'une part, le déplacement des objets de base d'un diagramme construit sur l'écran avec des outils de la géométrie dynamique génère un grand nombre de dessins (tracés matériels) qui représentent un même objet géométrique, donc une même figure. D'autre part, la nécessité, pour obtenir à l'écran un diagramme qui résiste au déplacement des objets de base, de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction, permet ainsi de caractériser l'objet géométrique par ses propriétés géométriques explicitées dans ce procédé (figure). Ce potentiel de la géométrie dynamique à rendre visibles les propriétés géométriques de figures comme des invariants dans le mouvement est une des principales raisons de l'intérêt porté aux constructions robustes (Laborde, 2005).

2.2.1. Paradigme de constructions robustes

Laborde (2005) présente le paradigme de constructions robustes à l'aide de l'exemple suivant (Figure 3) : Soit un cercle C de centre O et soit A un point sur ce cercle. B est un point du cercle C diamétralement opposé de A . M est un point sur le cercle C . Lorsque l'on affiche la mesure de l'angle AMB , on s'aperçoit qu'il s'agit d'un angle droit. Lors du déplacement du point M sur le cercle, on peut observer que cette mesure est invariante. Cette construction robuste montre que pour tout point M sur le cercle (sauf A et B), l'angle AMB est droit.

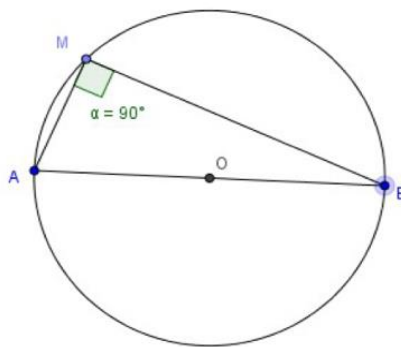


Figure 3. – Angle AMB inscrit dans un cercle de diamètre AB

Cette construction peut alors être exploitée dans des classes de collège pour faire découvrir le théorème selon lequel un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Selon Laborde (*ibid.*), la construction robuste contribue à une meilleure identification des éléments du théorème pour plusieurs raisons :

- La construction nécessite de prendre en compte deux conditions pour obtenir un angle droit : AB doit être un diamètre du cercle et le point M doit appartenir au cercle ;
- Elle permet de contraster l'invariance de la mesure de l'angle AMB avec la nature variable du point M ;
- Elle extériorise la nature variable du point M et matérialise l'ensemble sur lequel il varie.

L'identification de ces éléments, qui contribue à construire le sens du théorème, s'opère en acte, le rôle de l'enseignant est d'amener les élèves à formuler le théorème.

Une des tâches fréquemment utilisées par des enseignants de mathématiques consiste alors à exploiter des constructions robustes dans le but de reconnaître ou de vérifier la validité d'un théorème, voire de le découvrir. L'expérimentation avec des constructions robustes permet par ailleurs d'observer que certaines propriétés spatio-graphiques ne sont pas nécessaires (par exemple l'horizontalité du diamètre AB dans l'exemple ci-dessus), ce qui contribue à distinguer la contingence de la nécessité. L'observation d'un grand nombre de configurations correspondant à un même théorème conduit à l'enrichissement d'images mentales.

2.2.2. Paradigme de constructions molles

Contrairement aux constructions robustes exploitées dans la recherche et dans l'enseignement de la géométrie dès la naissance de la géométrie dynamique, les constructions molles n'ont été identifiées qu'en 2000 par Healy. Laborde (2005) en donne l'exemple suivant : Soit un cercle C de centre O et soit A un point sur ce cercle. B est un point du cercle C diamétralement opposé de A. M est un point du plan à l'extérieur du cercle C (Figure 4, gauche). L'enseignant demande aux élèves de trouver une position de M à l'extérieur du cercle telle que l'angle AMB soit obtus.

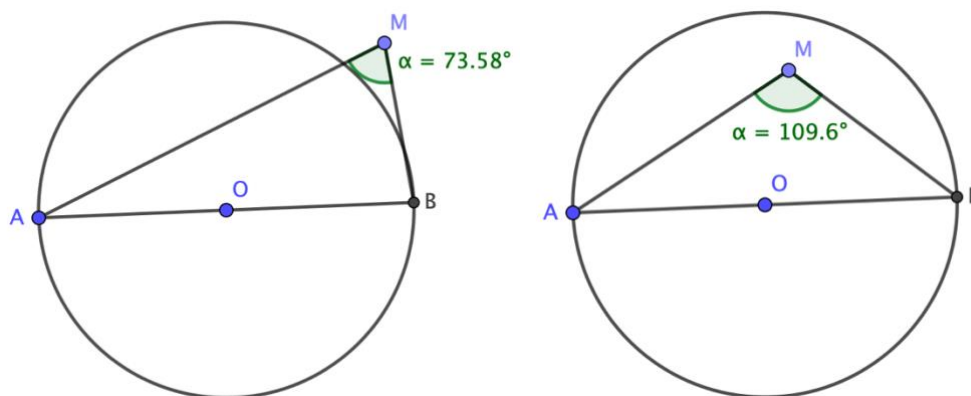


Figure 4. – L'angle AMB est aigu lorsque M est à l'extérieur du cercle (gauche) et obtus lorsque M est à l'intérieur du cercle (droite)

Les élèves déplacent le point M à l'extérieur du cercle et observent que l'angle AMB reste aigu. Ils deviennent convaincus qu'il n'est pas possible de trouver une position de M qui rendrait l'angle AMB obtus. Ils peuvent alors décider, spontanément ou encouragés par l'enseignant, de déplacer M à l'intérieur du cercle, ce qui leur permet de remarquer que l'angle devient obtus (Figure 4, droite). En déplaçant M à l'intérieur du cercle, ils observent que l'angle reste obtus. L'enseignant peut alors demander aux élèves de déplacer le point M de l'intérieur vers l'extérieur du cercle et vice versa, observer les modifications de la mesure de l'angle et d'anticiper la mesure de l'angle lorsque M est sur le cercle.

Laborde (2005) précise que cette construction est appelée molle parce que M n'est pas construit comme un point du cercle et la propriété que les élèves vont être amenés à découvrir n'est pas visible. Ainsi, les élèves vont-ils découvrir une propriété différente de celle de la construction robuste présente dans l'exemple précédent (Figure 3) : ils vont en effet découvrir le lien entre la mesure de l'angle AMB et la position du point M à l'extérieur, à l'intérieur ou sur le cercle.

L'apport de la construction molle à cet apprentissage est également différent de celui de la construction robuste :

- La construction molle permet de voir « pourquoi » l'angle AMB est droit lorsque M appartient au cercle. Le cercle matérialise la frontière entre deux régions du plan : l'une où l'angle AMB est obtus et l'autre où il est aigu. En appui sur le principe de continuité, que les élèves mobilisent spontanément, il devient clair que l'angle AMB doit être droit lorsque M est un point du cercle. Le théorème a ainsi plus de sens pour les élèves.
- La construction molle met l'accent sur le lien entre la condition « M est un point du cercle » et la conséquence « l'angle AMB est droit » parce qu'il est aisé de déplacer M dans le plan et explorer les variations de la mesure de l'angle selon la position du point M .

Laborde (*ibid.*) situe les origines du paradigme des constructions molles dans l'observation par des chercheurs des démarches d'élèves dans le processus de résolution de problèmes. En effet, les chercheurs ont observé que les élèves se servent de constructions molles pour chercher les propriétés géométriques leur permettant de construire des figures robustes dans la suite. Ces constructions favorisent ainsi la transition d'une approche empirique vers une approche théorique. Malgré l'importance de ce type de constructions dans le processus de résolution de problèmes des élèves, l'auteur reconnaît la difficulté à les accepter aussi bien par les chercheurs que par les enseignants :

[Soft constructions] play an important role in moving from a purely visual solution done by adjusting to a solution entirely based on theoretical solutions but achieved by dragging. These constructions are culturally not accepted since the time of the Greek geometry rejected constructions based on motion and restricted the allowed constructions to those done with straight edge and compass.

Les paradigmes de constructions robustes et molles mettent en évidence le rôle différent du déplacement : il sert de moyen de validation dans le premier, tandis qu'il fait partie du processus de résolution de problèmes dans le second. Le déplacement comme fonctionnalité essentielle de la géométrie dynamique a été examiné minutieusement dans de nombreuses recherches, comme nous le montrons dans la suite.

2.2.3. Déplacement d'un point de vue instrumental

C'est en particulier la mobilisation de l'*approche instrumentale* (Rabardel, 1995) qui a permis d'étudier en détail la variété de manières d'utiliser le déplacement (Arzarello *et al.*, 2002 ; Olivero, 2002 ; Restrepo, 2008). Ces chercheurs ont proposé des catégorisations de manières de déplacer en géométrie dynamique parmi lesquels les trois suivantes (Figure 5) semblent jouer un rôle important dans des tâches exploratoires de résolution de problèmes :

- Déplacement erratique (*wandering dragging*) où les objets de base d'une construction sont déplacés sur l'écran au hasard afin de découvrir des configurations. Les élèves commencent en général à explorer une nouvelle situation en utilisant cette modalité de déplacement ;
- Déplacement guidé (*guided dragging*) où le déplacement des objets de base est fait dans l'intention d'obtenir une forme particulière (Figure 5b) ;
- Déplacement lieu muet (*dummy locus dragging*) où les objets de base sont déplacés en s'efforçant de maintenir une propriété particulière satisfaite, le point variable suivant une trajectoire cachée (Figure 5c).

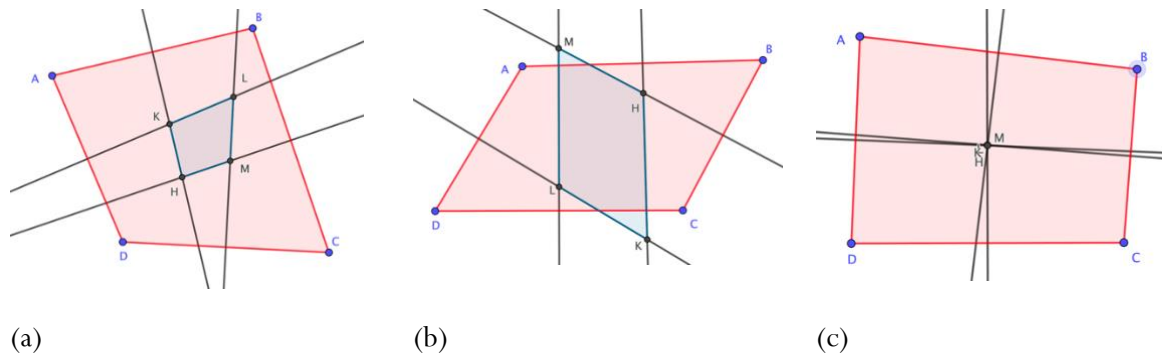


Figure 5. – Dans l'exemple pris dans (Olivero, 2002), les sommets du quadrilatère HKLM sont les intersections des médiatrices des côtés du quadrilatère ABCD. Les élèves cherchent les relations entre ABCD et HKLM (a). Le déplacement guidé peut être mobilisé afin d'obtenir des formes particulières du quadrilatère ABCD, par exemple un parallélogramme (b) pour observer la forme de HKLM. Le déplacement lieu muet permet de déplacer un des sommets du quadrilatère ABCD tout en essayant de maintenir les points H, K, L et M superposés (c) et observer la trajectoire du point déplacé.

Du point de vue de l'approche instrumentale, ces différentes modalités de déplacement peuvent être considérées comme des instruments différents développés à partir d'un même artefact – fonctionnalité déplacement de la géométrie dynamique. Selon le type de tâche, des instruments différents doivent être mobilisés. Or, les recherches montrent que le développement de ces instruments ne va pas de soi ; il nécessite des genèses instrumentales plus ou moins longues chez des élèves et un accompagnement de ces genèses par l'enseignant (Restrepo, 2008).

2.2.4. Approche de preuve

Pour terminer cette partie dédiée à la géométrie dynamique, il nous semble important de présenter des travaux qui montrent comment la géométrie dynamique peut permettre une approche de la preuve, ceci pour les mettre en opposition aux avis sur les effets contreproductifs de l'usage de cette technologie qui serait un obstacle pour la mise en œuvre de processus de validation :

Les différences portent sur les effets induits par les environnements papier-crayon et Cabri, notamment le fait que, lors de la résolution du problème, Cabri facilite considérablement l'accès à la conjecture, essentiellement grâce à son aspect dynamique. [...] De même, en ce qui concerne les démarches de validation, l'évidence visuelle de la « figure », qui s'érige en obstacle à la mise en œuvre correcte d'une démonstration, est comparable dans les deux environnements ; j'irai même jusqu'à dire qu'elle est plus importante en environnement Cabri, du fait de la qualité du logiciel, et plus précisément de la grande précision des dessins réalisés. (Parzysz, 2006, p. 146)

En appui sur la *théorie de médiation sémiotique* (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008), Mariotti (2014) explore le potentiel sémiotique des outils de la géométrie dynamique et en particulier du déplacement. L'auteur met en évidence deux types d'invariants - invariant direct et invariant indirect – qu'elle illustre sur l'exemple suivant (Figure 6) : si, dans un quadrilatère qui possède deux côtés opposés parallèles, on construit les médiatrices de ces deux côtés parallèles, le déplacement des sommets du quadrilatère permet d'observer non seulement que ces médiatrices restent bien les médiatrices des côtés du quadrilatère (invariant direct), mais que ces médiatrices sont elles aussi parallèles (invariant indirect).

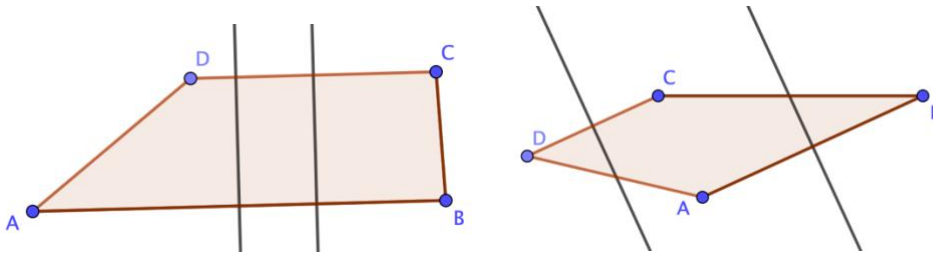


Figure 6. – Construction illustrant les notions d’invariants direct et indirect

Ces deux types d’invariants conduisent à percevoir des conséquences logiques entre propriétés : dans l’exemple ci-dessus, le parallélisme des médiatrices (invariant indirect) est une conséquence logique du fait que ces deux droites sont des médiatrices des côtés parallèles d’un quadrilatère (invariant direct). La distinction entre les invariants direct et indirect est, selon Mariotti (*ibid.*), essentielle pour identifier et discerner les propriétés données et leurs conséquences et permet l’accès aux propositions conditionnelles :

Therefore, we claim that the dragging tool used in solving a conjecture-production task has a *semiotic potential* recognizable in the relationship between:

- Direct and indirect invariants and premise and conclusion of a conditional statement and
- The dynamic sensation of dependence between the two types of invariants and the geometrical meaning of logical dependence between premise and conclusion (Mariotti, 2014, p. 161, souligné par l’auteure)

Ainsi, le déplacement peut-il être exploité pour construire le sens des propositions formulées sous la forme d’une implication où l’invariant direct correspond à l’hypothèse et l’invariant indirect à la conclusion. La relation de dépendance entre invariants direct et indirect acquiert alors la signification géométrique de la dépendance entre l’hypothèse et la conclusion.

2.3. Systèmes de mathématiques symboliques

Les recherches qui s’intéressent aux systèmes de calcul formel ou aux calculatrices symboliques et graphiques et que nous présentons dans cette partie se situent dans le cadre théorique articulant l’*approche instrumentale* (Rabardel, 1995) et la *théorie anthropologique du didactique* (Chevallard, 1992). L’approche instrumentale conduit à l’étude de genèses instrumentales, processus de transformation des artefacts numériques en question en instruments de résolution de tâches mathématiques. La théorie anthropologique du didactique permet d’interroger la dimension institutionnelle et écologique de l’intégration des artefacts dans les classes de mathématiques, ainsi que de questionner la dialectique entre activité conceptuelle et technique permise par ces artefacts.

Ces recherches ont mis en évidence un certain nombre de phénomènes didactiques liés à l’intégration du numérique dans l’apprentissage des mathématiques. Citons deux exemples emblématiques, celui de DERIVE, un logiciel de calcul formel, et celui des calculatrices graphiques.

Les recherches menées sur l’utilisation de DERIVE dans les classes de mathématiques (Artigue, 1997) ont montré un décalage entre, d’une part, le discours avançant que les systèmes de calcul formel induisent une activité plus conceptuelle en libérant les élèves des tâches techniques et, d’autre part, la réalité des usages révélant une gestion coûteuse en temps de la communication avec ces systèmes par les élèves et des difficultés que ces derniers ont à interpréter les rétroactions. Les systèmes de calcul formel permettent une multiplicité des actions possibles à un coût minime, ce qui pourrait favoriser une approche

expérimentale des mathématiques et contribuer à éliminer le blocage. Cependant, comme le précise l'auteure, cette caractéristique impacte fortement le comportement des élèves face à une tâche mathématique :

Le coût faible des actions et du changement d'action favorise l'apparition de phénomènes que nous avons qualifiés de "phénomènes de pêche" : on fait des essais, sans se préoccuper de leur organisation ou de leur contrôle, en espérant qu'en un temps raisonnable, on obtiendra quelque chose d'intéressant (Artigue, 1997, p. 163)

La conséquence de ce phénomène de pêche est une sous-exploitation des rétroactions du logiciel, comme le précise Artigue :

Le faible coût des essais, leur productivité, tendent aussi à s'opposer à l'exploitation des rétroactions, généralement considérées comme un moteur essentiel des adaptations souhaitées. Lorsque la production de DERIVE n'est pas conforme à leurs attentes, les élèves, majoritairement, enregistrent le décalage et essaient autre chose, plutôt que de se lancer dans la recherche de raisons au décalage constaté, cognitivement plus coûteuse (*ibid.*).

Les travaux de Trouche (2002) portant sur des calculatrices symboliques et graphiques (c'est-à-dire équipées d'un système de calcul formel) montrent que les réponses des élèves dépendent fortement de l'environnement dans lequel se situe leur résolution de tâches mathématiques. Ainsi, par exemple, l'auteur rapporte qu'à la question « La fonction f définie par $f(x) = \ln x + 10 \sin x$ a-t-elle une limite en $+\infty$? », 25% d'élèves donnent une réponse erronée lorsqu'ils travaillent avec une calculatrice, alors que seulement 5% d'élèves ne réussissent pas sans calculatrice. L'analyse fine des genèses instrumentales liées à l'utilisation de la calculatrice a permis d'identifier des schèmes d'action instrumentée comportant des théorèmes-en-actes comme « si $f(x)$ prend des valeurs beaucoup plus grandes que x , alors la limite de f est infinie » ou « si la fonction croît très fortement, alors la limite est infinie », qui amènent les élèves à conclure que la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$ comme elle semble osciller pour les valeurs de x grandes (Figure 7).

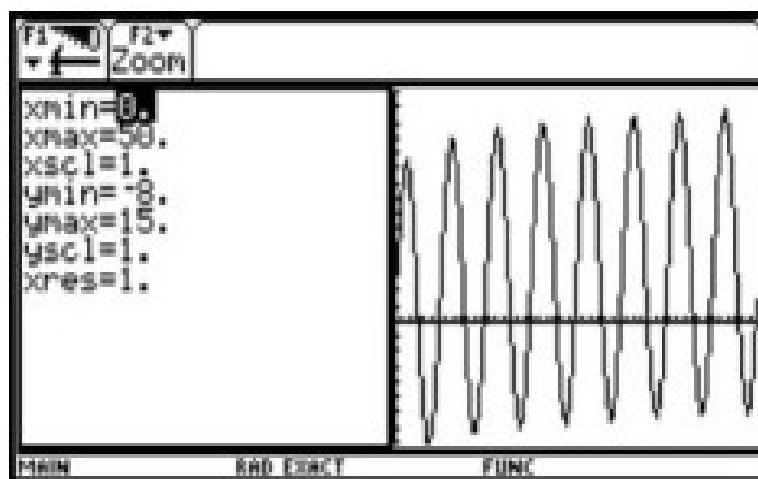


Figure 7. – Représentation avec une calculatrice graphique de la fonction f définie par $f(x) = \ln x + 10 \sin x$ (Trouche, 2002, p. 190)

L'auteur conclut alors que le passage aux calculatrices symboliques et graphiques s'accompagne pour certains élèves d'un appauvrissement de l'instrument.

2.4. Technologie mobile

L'omniprésence et l'accessibilité de la technologie mobile (tablettes, smartphones...), accompagnées d'un développement rapide d'applications éducatives (Larkin, 2015), conduit les chercheurs à s'intéresser à leur potentiel à transformer l'expérience d'apprentissage et améliorer ainsi les possibilités d'apprentissage des mathématiques (Calder et Murphy, 2018). Les deux affordances suivantes sont citées comme spécifiques aux technologies mobiles :

- L'interface tactile qui permet une médiation directe, offrant la possibilité aux utilisateurs de produire et de transformer des objets avec les doigts et les gestes, au lieu d'agir via un clavier ou une souris (Sinclair et Pimm, 2015) ;
- Les modalités multi-sensorielles d'interaction (visuelles, haptiques, sonores) qui ont le potentiel à procurer des expériences d'apprentissage uniques (Calder *et al.*, 2018).

Ces affordances sont exploitées par exemple dans l'application TouchCounts¹ (Figure 8) qui permet aux enfants de créer et de manipuler des nombres avec leurs doigts et d'interagir avec diverses représentations de ces nombres, telles que nombres parlés, nombres écrits, nombres générés par des pointages séquentiels de doigts, dans le but de donner du sens au concept de nombre.

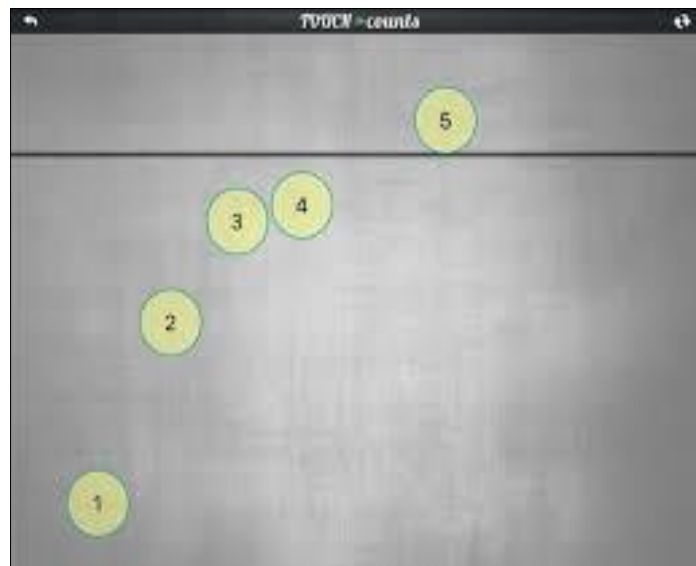


Figure 8. – Copie d'écran de l'application TouchCount

De Freitas et Sinclair (2017) avancent que les gestes deviennent une caractéristique essentielle des interfaces tactiles et explorent en quoi ces nouvelles activités manuelles changent la manière de faire des mathématiques. Les chercheuses interrogent alors la signification des gestes et suggèrent qu'avec l'interface tactile, les gestes ne sont pas seulement des représentations de la pensée, mais impliquent également un processus d'invention et d'interaction :

With the touchscreen interface, and particularly the multitouch actions, the hand is involved in a process of communicating that is also a process of inventing and interacting (p. 2537).

¹ TouchCounts : <http://touchcounts.ca/index.html>

Le caractère mobile de ce type de technologie, considérée comme une autre affordance importante, permet d'envisager des activités mathématiques en dehors de la classe. C'est le cas par exemple de parcours mathématiques (*math trails*) où les élèves, guidés par leurs smartphones grâce à l'application MathCityMap² (Figure 9), résolvent des tâches mathématiques construites autour d'objets réels dans le monde environnant (Ludwig et Jablonski, 2021 ; Nicolas *et al.*, 2023). Cette approche de faire et d'apprendre les mathématiques s'apparente à celle de *Realistic Mathematics Education*³ développée aux Pays Bas ou encore à celle de *Mathematics in context*⁴ provenant des États-Unis.

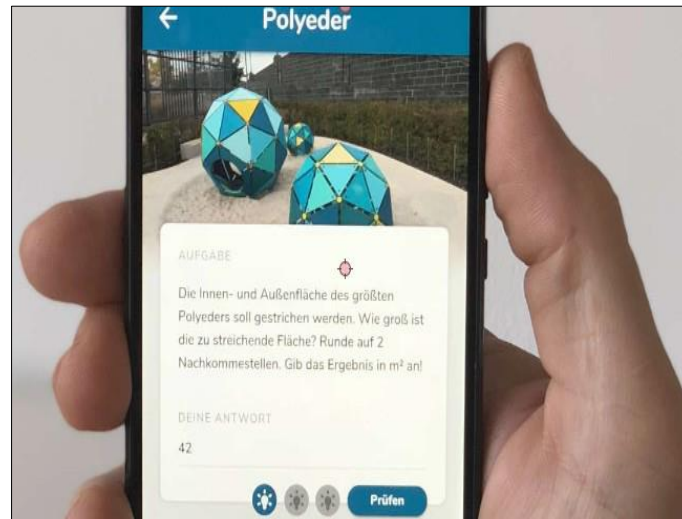


Figure 9. – Application MathCityMap sur un smartphone

2.5. Réalité augmentée, réalité virtuelle

Ces dernières années, des technologies de réalité augmentée et virtuelle connaissent un essor remarquable dans nombreux domaines, dont celui de l'éducation. Comme nous le montrons dans cette section, les interactions avec ces technologies impliquant le corps, de nouvelles approches théoriques émergent pour étudier les relations complexes des actions dans ces mondes nouveaux et les conceptualisations.

2.5.1. Réalité augmentée

La technologie de réalité augmentée a, selon certains auteurs, le potentiel de révolutionner l'enseignement et l'apprentissage (voir par exemple Billingham et Duenser, 2012 ; Lee, 2012 ; Kaufmann et Schmalstieg, 2003). Un environnement de réalité augmenté est défini comme celui qui permet aux objets réels et virtuels de coexister dans un même espace et avec lesquels il est possible d'interagir en temps réel (Bower *et al.*, 2014). Ainsi, par exemple, Schacht et Swidan (2019) ont expérimenté un environnement constitué d'un phénomène réel filmé (mouvement d'un objet sur un plan incliné) augmenté de données numériques et de graphes de fonctions associés au phénomène (Figure 10) et ont étudié dans quelle mesure un tel environnement pouvait soutenir la conceptualisation des notions d'analyse.

² MathCityMap : <https://mathcitymap.eu/fr/>

³ Realistic Maths Education : <https://rme.org.uk/>

⁴ Mathematics in context : <https://mcc.edc.org/pdf/perspmathincontext.pdf>

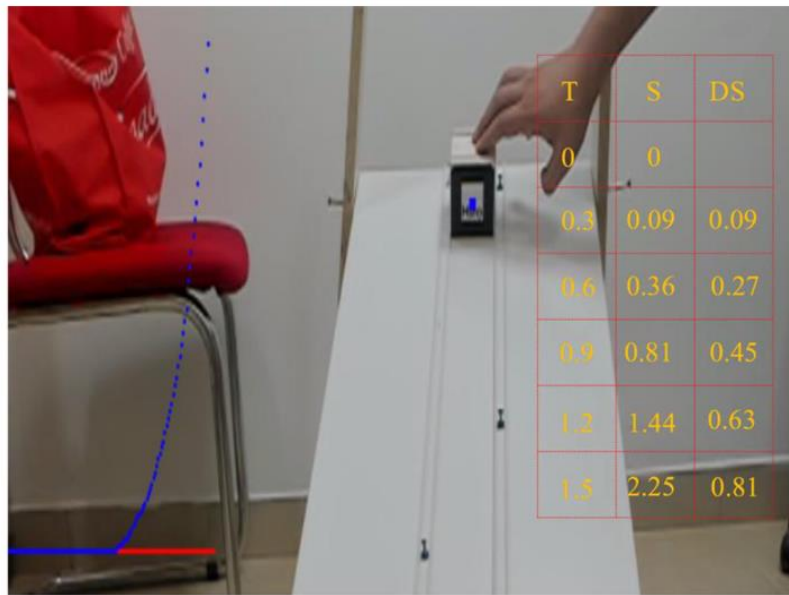


Figure 10. – Technologie de réalité augmentée superposant des objets virtuels (données) à un phénomène réel filmé (Schacht et Swidan, 2019)

La principale caractéristique de tels environnements est la multimodalité, c'est-à-dire « la contribution de plusieurs modalités pour appréhender un phénomène ou pour interagir avec un objet »⁵. Les interactions avec ce type d'environnement impliquent le corps, ce qui conduit les chercheurs à interroger les relations entre la cognition et la corporéité. Le point de vue de la cognition incarnée (*embodied cognition*) soutient que les processus cognitifs sont profondément enracinés dans les interactions du corps avec le monde (Wilson, 2002). Shvarts *et al.* (2021) introduisent le concept de système fonctionnel corps-artefact (*body-artifact functional system*) soulignant le fait que les artefacts sont inclus dans les boucles perception-action des actions instrumentées.

2.5.2. Réalité virtuelle

Ces mêmes considérations s'appliquent à des environnements de réalité virtuelle que Depover *et al.* (2009) caractérisent comme suit :

L'une des caractéristiques de base d'un tel environnement informatique réside dans le fait qu'il plonge l'apprenant dans un monde à trois dimensions dans lequel il pourra se mouvoir comme il le ferait dans la réalité. Cet environnement fonctionne à partir d'images de synthèse, qui, présentées à l'apprenant à l'aide de périphériques spécifiques, lui donnent l'illusion de la réalité. (p. 116)

De même, Johnson-Glenberg (2018) identifie deux « affordances profondes » qui pourront être exploitées dans de domaine de l'éducation : (1) le sentiment de présence et (2) l'incarnation (*embodiment*) et le pouvoir d'action qui en résulte associé à la manipulation d'objets 3D qui donne à l'apprenant un contrôle inédit sur l'environnement d'apprentissage.

⁵ « Multimodalité », *Wikipédia* :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Multimodalit%C3%A9#Dans_le_domaine_de_l'interactivit%C3%A9_et_des_interfaces

Ces environnements offrent ainsi de nouvelles potentialités pour de nouveaux types d'activités mathématiques qui sont, à l'heure actuelle, encore peu documentées. Une recherche pionnière sur le potentiel de *Handvaver*, un environnement de réalité virtuelle (Dimmel et Bock, 2019) pour développer la vision dans l'espace des élèves est en cours (thèse de X. Nicolas, voir également Nicolas et Trgalová, 2019)

(Figure 11).

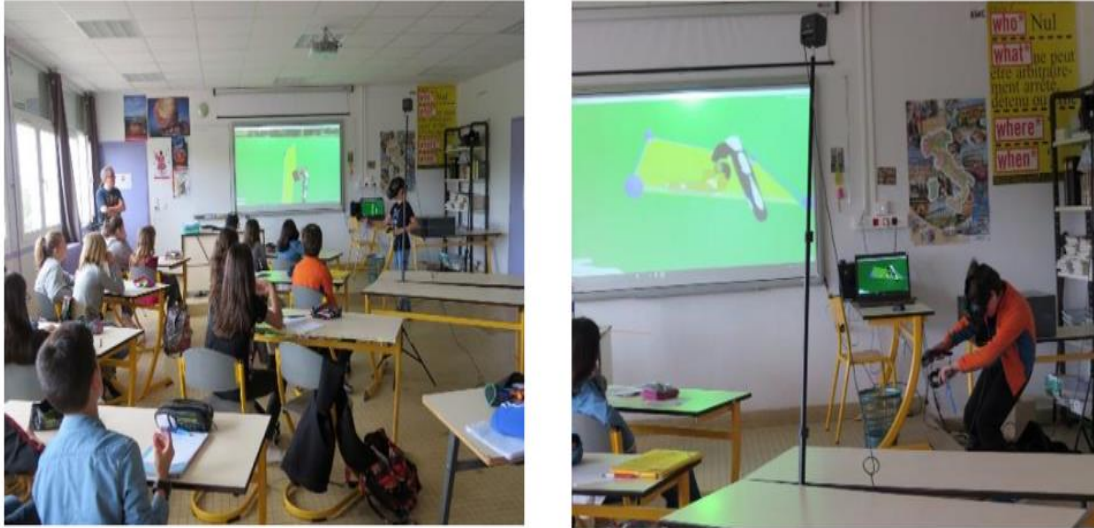


Figure 11. – Expérimentation en classe de Handvaver, environnement de réalité virtuelle (Nicolas et Trgalová, 2019)

Les recherches sur les usages des technologies s'accordent toutes sur le rôle essentiel de l'enseignant dans la gestion de situations instrumentées et l'accompagnement des genèses instrumentales des élèves (nous renvoyons ici à l'article de Maha Abboud dans ce numéro). Par ailleurs, les technologies elles-mêmes ne sont pas suffisantes pour produire les effets escomptés, car, comme le précisent Thomas et Lin (2013), les principales affordances des technologies émanent des tâches qui sont utilisées avec elles. C'est pourquoi la deuxième partie de l'article est dédiée aux ressources numériques qui proposent des situations mobilisant des technologies numériques.

3. Partie 2 : ressources numériques

Dans cette partie, nous nous attachons tout d'abord à présenter les différentes conceptualisations de la notion de ressource et en particulier de ressource numérique et les problématiques spécifiques que ces dernières posent. Nous abordons ensuite deux de ces problématiques : celle de l'indexation de ressources numériques et celle de leur conception.

3.1. Qu'est-ce qu'une ressource ?

Reverdy (2014) fait état de la « complexité de la notion de ressource » qu'elle aborde à travers « les différentes définitions de ce que peut être une ressource pour enseigner, les différents types de ressources qui existent [...] et les usages que les enseignants en font au quotidien » (p. 3). Curieusement, dans sa revue de littérature, on ne trouve aucune définition explicite de ressource ; à la place, plusieurs

« découpages » sont mentionnés, par exemple ressources matérielles, humaines et culturelles, en référence aux travaux d'Adler (2000) ou encore la classification de ressources matérielles en ressources imprimées, ressources numériques et autres ressources parmi lesquelles sont distingués « des objets de la vie quotidienne utilisés à des fins pédagogiques ou des objets didactiques [...] construits en vue d'un apprentissage précis » (p. 2). Ces découpages font apparaître la difficulté à cerner les ressources utilisées par des enseignants, puisque tout objet peut potentiellement être une ressource du moment où un enseignant s'en sert pour faire son enseignement. D'autre part, dresser une cartographie de ressources existantes est une tâche complexe du fait qu'une multitude de critères peuvent être pris en compte conduisant à des classifications diverses et variées, par exemple le support (papier, numérique), la provenance (institution, association...) ou encore l'usage qui en est fait (pour la formation, pour la classe...).

Dans un autre contexte, en s'interrogeant sur les difficultés que les enseignants québécois rencontrent dans leurs efforts d'intégration des technologies numériques, Bibeau (2005) déplore dans un premier temps une multitude de dénominations relatives aux ressources qu'il qualifie de didactiques :

Une première difficulté concerne les ressources didactiques. Matériel scolaire, matériel pédagogique, matériel didactique, matériel complémentaire d'usage collectif [...], matériel d'apprentissage, [...] ressources d'enseignement et d'apprentissage (REA), "objet d'apprentissage", voilà autant d'appellations que l'on utilise pour identifier les ressources éducationnelles, culturelles et informationnelles que l'enseignant utilise pour enseigner et l'élève pour apprendre.

Ce constat l'a conduit à proposer sa propre vision de ce que peut être une ressource :

[...] pratiquement toute donnée, toute information, toute banque de ressources, tout document accessible sous format imprimé (manuel scolaire, livre de lecture, journal ou magazine, etc.), sous format analogique (cassette audio ou vidéo) ou sous format numérique (disquette, cédérom, DVD, Internet), puissent servir de matériel pédagogique pour l'apprentissage. Tous ces documents [peuvent] être considérés comme des ressources d'enseignement et d'apprentissage.

Or, cette proposition a été formulée en lien avec une des problématiques abordées par l'auteur concernant l'indexation des ressources pour pouvoir « les classer, les partager, les retrouver, les réutiliser et pour éviter de les dupliquer inutilement ». Ainsi, ne sont considérées comme ressources que des « objets » matériels, imprimés, analogiques ou numériques.

Une perspective différente est adoptée par Gueudet et Trouche (2011) au sein de l'approche documentaire du didactique ; les auteurs confèrent à la notion de ressource

une acception très large : un manuel scolaire, les programmes officiels, un logiciel, un site web, peuvent être, bien entendu, des ressources pour le professeur. Mais une copie d'élève, un conseil donné par un collègue... constituent également des ressources, au sens attribué à ce terme par (Adler, 2000) : ce qui ressource l'activité et le développement professionnel des professeurs (p. 147).

Cette « acception très large » s'impose pour pouvoir étudier le « travail documentaire » de l'enseignant qui est défini comme un travail de

conception (qui se nourrit des ressources disponibles) de la matière de son enseignement, pour lui, pour les élèves, pour les collectifs et les institutions auxquels il participe (Gueudet et Trouche, 2008, p. 7).

Dans cette large palette de ressources, une attention particulière est portée dans la littérature, notamment anglo-saxonne, aux ressources institutionnelles qui relèvent du curriculum. Ces ressources, nommées

curriculum materials (Remillard, 2005), comprennent des textes de programmes, des manuels, des guides pédagogiques ou encore des logiciels éducatifs. Le terme plus générique d'*instructional material* ou plus récemment *instructional resources* (Remillard, 2018) désigne "tools provided to, appropriated by, or generated by teachers to guide or support instruction" (p. 70).

Ce panorama d'approches de ressources montre la complexité à circonscrire précisément la notion de ressource que les chercheurs conceptualisent différemment selon les problématiques abordées. Parmi ces conceptualisations se dégagent deux points de vue :

- l'un proposé dans l'*approche documentaire du didactique* qui conçoit une ressource en rapport avec un sujet (en particulier l'enseignant), c'est-à-dire que quelque chose peut être ressource pour quelqu'un et ne pas l'être pour quelqu'un d'autre : c'est le fait que cette chose nourrit (re-ressource) l'activité du sujet qui en fait une ressource ;
- l'autre point de vue est celui du domaine du e-learning qui considère une ressource (ou un objet d'apprentissage) comme un objet matériel qui peut être décrit et utilisé dans le processus d'enseignement et d'apprentissage.

Une attention particulière est portée aux ressources numériques du fait qu'elles offrent de nouvelles opportunités pour enrichir l'activité mathématique des élèves et pour diversifier les pratiques des enseignants et qu'elles sont devenues quasiment incontournables aujourd'hui. La section suivante est consacrée à ce type de ressources.

3.2. Qu'est-ce qu'une ressource numérique ?

Dans le milieu éducatif en relation avec le numérique, nous ne pouvons pas nous intéresser au concept de ressource numérique sans considérer le concept d'objet d'apprentissage (*learning object*).

Le concept d'objet d'apprentissage est apparu dans le contexte d'apprentissage en ligne (*e-learning*), en référence au paradigme orienté objet de l'informatique des années 1960 qui a fortement valorisé la création de composants réutilisables (Del Moral et Cernea, 2005). Bien qu'il n'y ait pas de consensus sur la définition d'un objet d'apprentissage, la réutilisabilité semble être sa principale caractéristique. Un objet d'apprentissage est ainsi défini par IEEE Learning Technology Standards Committee comme "any entity, digital or non-digital, that can be used, re-used, or referenced during technology supported learning"⁶. Considérant cette définition trop large, Wiley (2002) propose de définir un objet d'apprentissage comme "any digital resource that can be reused to support learning" (p. 6). L'auteur précise que cette définition comprend tout ce qui peut être diffusé par Internet ; des images, des vidéos, des animations ou des applications disponibles en ligne sont des exemples de « petits » objets d'apprentissage, des pages web entières qui combinent divers médias sont des exemples d'objets d'apprentissage plus grands.

La définition de Wiley suggère que toute ressource numérique n'est pas nécessairement un objet d'apprentissage : pour l'être, la ressource doit soutenir l'apprentissage. Metros (2005) va plus loin et précise qu'une ressource, pour pouvoir faciliter l'apprentissage et devenir ainsi un objet d'apprentissage, doit satisfaire trois conditions :

⁶ « The Learning Object Metadata standard », *IEEE Learning Technology Standards Committee* : <https://www.ieeeltsc.org/working-groups/wg12LOM/lomDescription/>

We established that in itself, a digital resource, even if it does mediate learning, is not a learning object. Digital resources comprise simulations, movie clips, audio files, photos, illustrations, maps, quizzes, text documents, and much more. Thus, to be considered a learning object, the digital resource must include or link to (1) a learning objective, (2) a practice activity, and (3) an assessment. (p. 12).

L'expression « ressource numérique » n'est cependant pas définie ; elle apparaît comme un terme générique englobant tout ce qui peut être stocké, partagé ou diffusé sur un support numérique et en particulier via internet.

En dehors des problématiques d'apprentissage en ligne, l'intérêt porté aux ressources numériques éducatives est motivé notamment par l'hypothèse que la transition du papier au numérique, du fait de son développement massif, va bouleverser les pratiques des enseignants : le numérique permet aux enseignants de prolonger le travail au-delà de la salle de classe, de réutiliser les ressources disponibles pour concevoir de nouvelles activités et de nouveaux supports en complément des manuels, ou de s'engager dans de nouvelles formes de collaboration avec d'autres enseignants. Il est cependant difficile de trouver une définition opérationnelle de ressource numérique. Le Centre collégial de développement de matériel didactique (CCDMD)⁷ définit les ressources numériques, nommées « ressources d'enseignement et d'apprentissage » (REA), comme étant « un cours, un programme ou une partie de cours réalisés sur support multimédia et faisant appel à la technologie informatique (TIC) » (CCDMD, 2003, p. 1). Cette définition est accompagnée d'exemples de REA :

des simulations, un dictionnaire informatisé ou diverses banques de données, des exercices, un répertoire de capsules vidéo ou des situations de résolution de problèmes accessibles à partir de cédéroms, de DVD ou d'Internet (*ibid.*).

La définition proposée par Bibeau (2005) repose également sur l'énumération d'objets numériques faisant partie de l'ensemble des ressources numériques : les ressources numériques pour l'éducation correspondent à

l'ensemble des **services en ligne**, des **logiciels** de gestion, d'édition et de communication (portails, logiciels outils, plates-formes de formation, moteurs de recherche, applications éducatives, portfolios) ainsi qu'aux **données** (statistiques, géographiques, sociologiques, démographiques, etc.), aux **informations** (articles de journaux, émissions de télévision, séquences audio, etc.) et aux **œuvres numérisées** (documents de références générales, œuvres littéraires, artistiques ou éducatives, etc.) utiles à l'enseignant ou à l'apprenant dans le cadre d'une **activité d'enseignement ou d'apprentissage** utilisant les TIC, activité ou **projet** pouvant être présenté dans le cadre d'un **scénario pédagogique** (c'est l'auteur qui souligne).

Les ressources numériques, de par leur diversité, leur quantité grandissante et une relative accessibilité, posent de nombreux défis. Selon Robertson (2006),

[d]énicher des ressources utiles, crédibles, des contenus éducatifs de qualité mis à jour régulièrement relève bien souvent de l'utopie (p. 13).

Ce constat met en lumière trois problématiques qui, selon Bibeau (2005), constituent des obstacles à l'intégration de ressources numériques en classe :

⁷ Centre de production de ressources numériques et de documents imprimés conçus à l'intention du personnel enseignant et des étudiants de l'ensemble du réseau collégial du Québec, principalement financé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur : <https://www.ccdmd.qc.ca/>

- le *développement* et la *mise à jour de contenus numériques* qui fait défaut ;
- l'*indexation* et la *diffusion de ressources numériques*. L'indexation de ressources numériques par des métadonnées standardisées est une condition nécessaire pour les trouver et pour pouvoir les réutiliser. Cette condition n'est toutefois pas suffisante selon Bibeau (2005) qui considère qu'« il faut également aider les usagers de l'éducation à repérer facilement ces ressources » (p. 13) ;
- la *qualité* et l'*évaluation de ressources numériques*. Du fait que « [n]'importe qui peut publier n'importe quoi sur Internet » (*ibid.*), la question de la validité et de la pertinence des informations véhiculées dans les ressources se pose avec insistance.

Dans la suite, nous abordons brièvement deux de ces problématiques : celle d'indexation et de conception de ressources numériques.

3.3. Indexation de ressources numériques

La diffusion et la possibilité de trouver des ressources pertinentes pour une utilisation donnée présente un défi pour les auteurs et les utilisateurs de ressources numériques. Au cœur de cette problématique se trouve la notion d'indexation de ressources par des métadonnées qui vise à accroître l'accessibilité des ressources, c'est-à-dire « permettre la recherche, l'identification, l'accès et la livraison »⁸ de ces ressources. Bien décrire les ressources est un enjeu important aussi bien pour l'utilisateur de ces ressources afin de pouvoir les retrouver, que pour le producteur pour pouvoir les partager et les rendre utilisables. Bourda (2004) avance une autre raison pour l'indexation des ressources qu'elle considère encore plus importante que juste retrouver les ressources :

Une ressource pédagogique est longue et coûteuse à produire. C'est pourquoi elle doit être développée en respectant des normes et des standards. La seule façon de la rentabiliser se trouve dans la vente et/ou la mutualisation. Cela nécessite de réfléchir à la fois au fond et à la forme, ce qui demande du temps. (p. 2)

Les métadonnées servent alors à décrire des ressources. Selon Bourda (*ibid.*), la description doit être précise, ce qui nécessite un grand nombre de champs à remplir. Par exemple, le standard LOM (Gómez de Regil, 2004) utilisé pour décrire des ressources pédagogiques en comporte une cinquantaine.

Malgré le nombre important de métadonnées que proposent ces standards, ces derniers présentent des insuffisances, comme le constate Jolivet (2018), en citant d'autres auteurs. Selon Jolivet, ces insuffisances se situent en particulier au niveau des descripteurs de l'activité pédagogique. L'auteur s'interroge également sur une indexation plus précise en lien avec des savoirs en jeu dans le contenu de la ressource. Il introduit alors la notion d'indexation « didactique » à destination des enseignants de mathématiques qui permettrait « de rendre compte des savoirs mobilisés et de leur organisation dans la ressource » (p. 32). Il pose la problématique d'indexation de ressources numériques éducatives comme

La modélisation et la caractérisation du savoir utilisées pour indexer et la mise en relation entre les ressources indexées et les curricula. (p. 54)

Cette problématique est abordée en détail dans Nicolas *et al.*, 2023.

⁸ « Les enjeux des Normes et Standard en FOAD », *WikiEducator* : https://wikieducator.org/Les_enjeux_des_Normes_et_Standard_en_FOAD

3.4. Conception de ressources numériques

La conception de ressources, et plus particulièrement de ressources numériques, est devenu objet majeur de recherche en didactique des mathématiques. En témoignent notamment une étude ICMI dédiée à ce sujet qui a donné lieu à l'ouvrage *Task design in mathematics education* (Watson et Ohtani, 2015) et l'ouvrage *Digital technologies in designing mathematics education tasks* (Leung et Baccaglioni-Frank, 2016) qui aborde plus spécifiquement la conception de ressources qui mobilisent la technologie numérique.

Leung et Bolite-Frant (2015) mettent en avant quatre dimensions à considérer lors de la conception d'une ressource numérique : épistémologique et mathématique, sémiotique, pédagogique et discursive.

La *dimension épistémologique et mathématique* est centrale dans la conception de ressources, selon les auteurs. Ils avancent qu'un même outil technologique peut être mobilisé avec différentes positions épistémologiques. Par exemple, dans une perspective épistémologique participationniste, l'outil peut favoriser la construction partagée de l'expérience ou du discours mathématique par les élèves, tandis que dans une perspective acquisitionniste, l'outil sera utilisé pour soutenir des activités exploratoires permettant aux élèves de construire des connaissances mathématiques personnelles. Cette dimension conduit alors à penser la connaissance mathématique que l'outil permet de travailler dans la perspective épistémologique choisie.

La *dimension sémiotique* questionne les représentations de la connaissance mathématique dans l'outil technologique. Lors de la conception de ressources, elle conduit d'une part à considérer la distance entre ces représentations et les représentations usuelles visées et d'autre part à interroger dans quelle mesure les représentations proposées par l'outil permettent de nouvelles approches de la connaissance mathématique. Cette dimension résonne avec le concept de transposition informatique (Balacheff, 1993).

La *dimension didactique et pédagogique* attire l'attention des concepteurs sur la nécessité de penser les interactions épistémiques possibles avec les différents outils disponibles dans la situation didactique proposée. Ces considérations incluent la familiarité avec les outils et la manière dont ils peuvent être utilisés pour favoriser les apprentissages visés.

La *dimension discursive* conduit à considérer que l'utilisation d'une technologie pour accomplir la tâche donnée implique l'institution d'un vocabulaire approprié qui accompagne cette utilisation. La technologie devient alors un médiateur pour le discernement des caractéristiques critiques des idées mathématiques recherchées dans la tâche. Par la suite, une narration appuyée sur le vocabulaire lié à la technologie peut être construite pour expliquer les idées mathématiques sous-jacentes.

Illustrons ces différentes dimensions sur l'exemple issu du projet ReMath (*Representing mathematics with digital media*⁹) et pris dans (Robotti, 2013). La technologie utilisée est AlNuSet¹⁰, un logiciel dynamique et interactif conçu pour soutenir des apprentissages de l'algèbre élémentaire. La ressource construite autour de ce logiciel propose la tâche « observer et expliquer la signification de $x + 2 = 2x + 3$ ». La conception de cette ressource a été motivée par des difficultés conceptuelles observées chez des élèves dans l'apprentissage de l'algèbre, et plus particulièrement des notions qualifiées par Chevallard (1985) de

⁹ The ReMath Project : <http://remath.cti.gr/s/el/>

¹⁰ AlNuSet : <http://www.alnuset.com/fr/alnuset/63-alnuset>

para-mathématiques telles que variable ou expression algébrique et proto-mathématiques, par exemple équivalence de deux expressions (dimension épistémologique et mathématique).

Concernant les représentations des concepts algébriques dans le logiciel AlNuSet (dimension sémiotique), la variable x est représentée par un point mobile sur une droite, le caractère variable se manifestant alors par la possibilité de déplacer ce point sur la droite qui fait alors prendre des valeurs différentes par x . Sur l'exemple de la Figure 12, la valeur de x se situe entre -1 et 0.

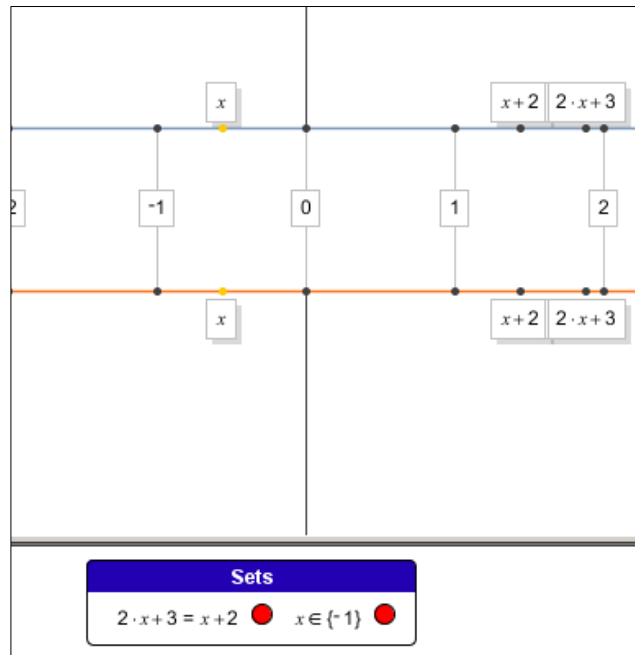


Figure 12. – Représentations de la variable x et des expressions $x+2$ et $2x+3$ dans le logiciel AlNuSet (Robotti, 2013, p. 104)

Les expressions algébriques contenant la variable x sont également représentées par des points sur la droite ; leur valeur dépend de celle de x . Ainsi, lors du déplacement du point x , toutes les expressions qui contiennent la variable x se déplacent également, en fonction de la valeur de x . Robotti (2013) affirme que cette caractéristique transforme la droite numérique en une droite algébrique sur laquelle il est possible de manipuler les expressions algébriques, ce qui offre aux élèves de nouvelles représentations sémiotiques qui visent à soutenir leurs conceptualisations d'objets algébriques. Ces représentations permettent notamment de visualiser la notion d'équation : dans le cas considéré, lorsque x admet la valeur -1, les expressions $x+2$ et $2x+3$ se retrouvent superposées en un même point sur la droite algébrique qui correspond à 1, valeur de ces expressions pour $x = 1$ (Figure 13). On peut remarquer également que dans le post-it en dessous de la droite algébrique, le point associé à l'égalité devient vert (Figure 13) ; il est rouge pour les autres valeurs de x (Figure 12).

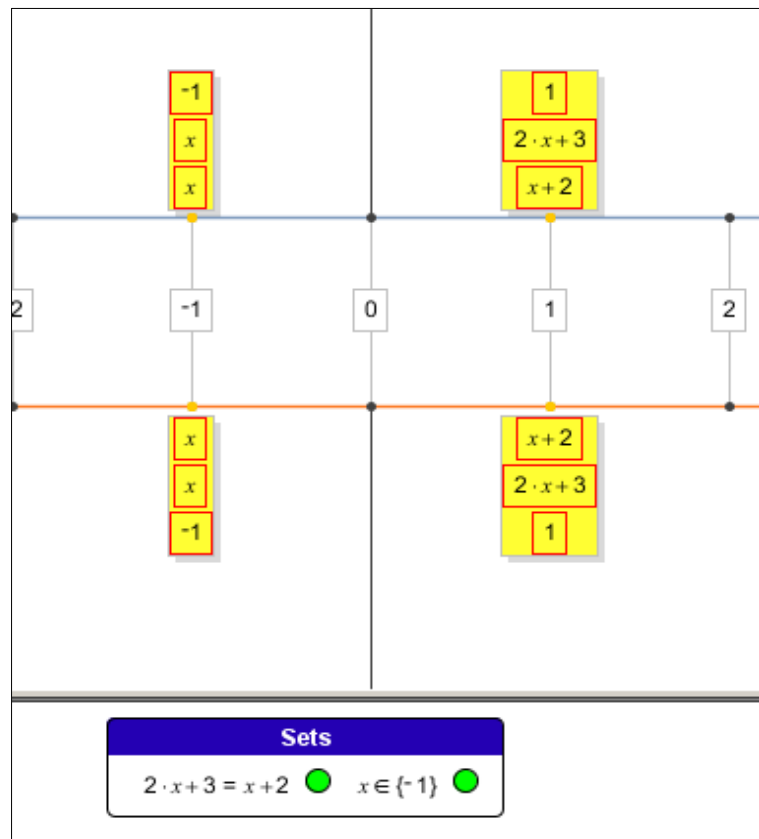


Figure 13. – Représentation de l'équation $x+2 = 2x+3$ dans le logiciel AlNuSet (Robotti, 2013, p. 104)

Les élèves peuvent ainsi manipuler les représentations des objets algébriques, observer et verbaliser leur comportement (dimension didactique et pédagogique) et établir le lien entre la notion discursive « déplacer le point x jusqu'à l'alignement des expressions » et le concept mathématique d'égalité des expressions algébriques (dimension discursive).

La conception d'une ressource numérique nécessite parfois de faire des choix sur trois plans : (1) au niveau de la création des objets que l'élève aura à manipuler, (2) sur le plan des possibilités de manipulation de ces objets, et (3) au niveau des étayages que l'on pourra proposer. Ces derniers peuvent avoir deux finalités (Reiser, 2004) :

- d'une part, structurer la tâche et guider l'élève ; ce type d'étayage doit permettre d'accomplir la tâche ;
- d'autre part, problématiser des éléments clés de la tâche ; ce type d'étayage a pour but de forcer l'élève à appréhender leur complexité pour renforcer les apprentissages.

L'exemple de la Figure 14 montre les rétroactions définies au sein d'une ressource numérique conçue dans le cadre du projet MC Squared¹¹. Des rétroactions spécifiques sont proposées dans le but de soutenir le développement de la créativité des élèves.

¹¹ Mathematical Creativity Squared (M C Squared) : <http://www.mc2-project.eu/>

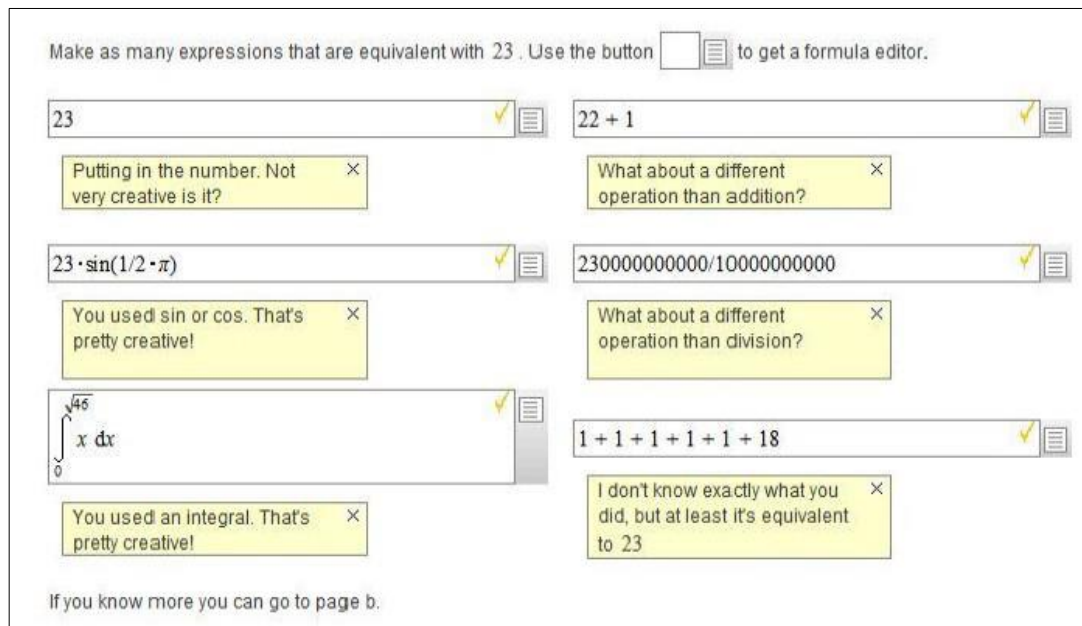


Figure 14. – Rétroactions visant à soutenir la pensée mathématique créative (Mercat *et al.*, 2013, p. 26)

4. Conclusion

Dans la première partie de cet article, nous avons dressé un panorama de l'évolution des technologies numériques et des recherches portant sur le potentiel de ces technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ce panorama montre l'évolution des technologies numériques avec une tendance à permettre des interactions multimodales, impliquant le corps de l'apprenant autant que sa cognition, contrairement aux technologies plus anciennes où cette interaction est limitée à la manipulation (directe) avec une souris. Cette évolution s'accompagne de développements théoriques qui prennent en compte ces nouvelles interactions, permettent d'aborder de nouvelles problématiques de recherche et génèrent de nouveaux résultats. Ainsi, par exemple :

- Le recours à la *théorie des situations didactiques* a conduit à considérer la technologie comme un élément du milieu didactique et à construire des situations a-didactiques ;
- L'*approche instrumentale* a permis de conduire des analyses plus fines des interactions des élèves avec les outils technologiques et de mettre en lumière la complexité des genèses instrumentales ;
- La *théorie anthropologique du didactique* a amené des questionnements de la légitimation scolaire de la technologie ;
- La *théorie de médiation sémiotique* a apporté un regard nouveau sur les constructions robustes dans la géométrie dynamique et sur leur potentiel sémiotique ;
- La *théorie de la cognition incarnée* a permis d'exploiter la nature des apprentissages dans des environnements technologiques multimodaux.

Or, pour une utilisation efficace de la technologie numérique qui soutiendrait les apprentissages des élèves, des tâches soigneusement conçues avec une mise en œuvre adaptée sont nécessaires (Jones, 2005). Comme nous avons montré dans la deuxième partie de l'article, la conception de ressources est une entreprise complexe. La synergie d'équipes pluridisciplinaires semble être un facteur de réussite lorsqu'il s'agit de concevoir des technologies numériques éducatives, comme en témoignent des projets *Pépète*,

Lingot (Grugeon-Allys et Delozanne, 2003) ou encore *MindMaths* (Jolivet et al., 2021 ; voir aussi Nicolas et al., 2023), qui ont reposé sur des collaborations entre des chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique et qui ont été parfois également soutenus par des ingénieurs assurant le développement informatique de ces technologies.

À l'heure actuelle, des recherches collaboratives, impliquant des chercheurs et des praticiens, autour de la conception de ressources numériques sont en plein essor. À titre d'exemple, nous pouvons citer deux collectifs constitués dans l'académie de Lyon : le Lieu d'éducation associé à l'IFE Réseau Lair¹² qui développe des jeux proposant des situations d'apprentissage mathématique mobilisant matériel tangible et numérique, ou encore le groupe Numatécol¹³ de l'IREM de Lyon qui s'intéresse à l'utilisation d'outils numériques à l'école avec des enseignants en primaire et en collège.

À l'ère digitale, nous pourrions croire que les technologies et ressources numériques font aujourd'hui partie du quotidien des enseignants et des élèves et ne font plus objet de recherche. Si, grâce aux résultats des recherches nous comprenons mieux les défis que ces usages posent aux enseignants, de nombreuses problématiques restent ouvertes, comme celle de l'appropriation de ressources par les élèves et les enseignants ou encore comment tenir le pas avec la vitesse de l'évolution technologique.

Références

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205–224. <https://doi.org/10.1023/A:1009903206236>
- Artigue, M. (1997). Le logiciel 'DERIVE' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational studies in mathematics*, 33, 133-169. <https://doi.org/10.1023/A:1002996128978>
- Arzarello, F., Olivero, F., Domingo, P. et Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM*, 34, 66-72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Balacheff, N. (2017). Seymour Papert (1928-2016) Aux sources d'une pensée innovante et engagée. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2/3), 383-396. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01716631>
- Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. In M. Artigue (Eds.), *Actes du Colloque Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 364-370). La Pensée Sauvage. <https://hal.science/hal-00190646>
- Bibeau, R. (2005), Les TIC à l'école : proposition de taxonomie et analyse des obstacles à leur intégration. *EpiNet* 81. <http://www.epi.asso.fr/revue/articles/a0511a.htm>
- Billinghurst, M. et Duenser, A. (2012). Augmented reality in the classroom. *Computer*, 45, 56–63. <https://doi.org/10.1109/MC.2012.111>
- Bourda, Y. (2004). *Pourquoi indexer les ressources pédagogiques numériques ?* Communication faite lors de la journée d'étude « L'indexation des ressources pédagogiques numériques : un partenariat à créer entre les SCD et les services TICE au sein des universités », Enssib. <https://www.enssib.fr/bibliotheque-numerique/documents/1233-pourquoi-indexer-les-ressources-pedagogiques-numeriques.pdf>
- Bower, M., Howe, C., McCredie, N., Robinson, A. et Grover, D. (2014). Augmented Reality in education – cases, places and potentials. *Educational Media International*, 51(1), 1-15. <https://doi.org/10.1080/09523987.2014.889400>
- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

¹² « LéA Réseau LAiR - Loire Ain Rhône, Lyon (2020-2023) », *Institut français de l'Éducation* : <http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-lair-loire-ain-rhone>

¹³ « Numatécol », *IREM de Lyon* : <http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?rubrique158>

- Bruillard, E. (1997). *Les machines à enseigner*. Hermès.
- Calder, N., Larkin, K. et Sinclair, N. (Eds., 2018). *Using Mobile Technologies in the Teaching and Learning of Mathematics*. Springer.
- Calder, N. et Murphy, C. (2018). Using apps for teaching and learning mathematics: A socio-material assemblage. In Hunter, J., Perger, P. et Darragh, L. (Eds.), *Making waves, opening spaces. Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (p. 194-201). MERGA.
- CCDMD (2003). *Réaliser des ressources d'enseignement et d'apprentissage informatisées*.
<https://www.ccdmd.qc.ca/system/files/rea-guide.pdf>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Clark-Wilson, A., Robutti, O. et Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM Mathematics Education*, 52, 1223-1242. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0>
- De Freitas, E. et Sinclair, N. (2017). Mathematical gestures: Multitouch technology and the indexical trace. In T. Dooley et G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (p. 2531-2538). DCU Institute of Education & ERME.
- Del Moral, M. E. et Cernea, D. A. (2005). Design and evaluate learning objects in the new framework of the semantic web. In A. Mendez-Vila *et al.* (Eds.), *Recent research developments in learning technologies*. FORMATEX.
- Depover, C., Karsenti, T. et Komis, V. (2009). *Enseigner avec les technologies. Favoriser les apprentissages, développer des compétences*. Presses de l'Université du Québec.
- Dimmel, J. et Bock, C. (2019). Dynamic mathematical figures with immersive spatial displays: The case of Handwaver. In G. Aldon et J. Trgalová (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching* (p. 99-122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19741-4_5
- Douglas, H.C. et Sarama, J. (1997). Research on Logo. A decade of progress. *Computers in the schools*, 14, 9-46.
https://doi.org/10.1300/J025v14n01_02
- Gómez de Regil, R. M. (2004). *Présentation des standards : (LOM) – Learning Object Metadata*. Communication faite lors de la journée d'étude « L'indexation des ressources pédagogiques numériques : un partenariat à créer entre les SCD et les services TICE au sein des universités », Enssib. <https://www.enssib.fr/bibliotheque-numerique/documents/1237-presentation-des-standards-lom-learning-object-metadata.pdf?telecharger=1>
- Grugeon-Allys, B. et Delozanne, E. (2003). EIAH et apprentissage de l'algèbre élémentaire : les projets Pépite et Lingot. In V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (Eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des mathématiques* (p. 21-43). IREM.
- Gueudet, G., Bottino, R. M., Chiappini, G., Hegedus, S. et Weigand, H.-G. (2009). Introduction. Technologies and resources in mathematics education. In V. Durand-Guerrier *et al.* (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1046-1049). INRP.
- Gueudet, G. et Trouche, L. (2011). Développement de l'Internet dans l'enseignement : vers un essor du collectif ? In C. Develotte et F. Poyet (Dir.), *L'éducation à l'heure du numérique, état des lieux, enjeux et perspectives* (p. 145-165). IFÉ-ENSL.
- Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique*, 2(3), 7-33. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342>
- Healy, L. (2000) Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, p. 103-117). Hiroshima University.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf#page=138>
- Jolivet, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH*. Thèse de doctorat, Université Grenoble –Alpes. <https://theses.hal.science/tel-02079412/document>
- Jolivet, S., Lesnes-Cuisiniez, E. et Grugeon-Allys, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : Prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 26, 117-156. <https://doi.org/10.4000/adsc.1060>
- Kaufmann, H. et Schmalstieg, D. (2003). Mathematics and geometry education with collaborative augmented reality. *Computers & Graphics*, 27, 339–345. [https://doi.org/10.1016/S0097-8493\(03\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0097-8493(03)00028-1)

- Kynigos, C. (2007). Half-baked Logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education*, 6(2), 335-358. <https://doi.org/10.15388/infedu.2007.22>
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. In S.-C. Chu et al. (Eds.), *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (p. 22-36). ATCM.
- Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1-2), 165-210. <https://revue-rdm.com/1994/cabri-geometre-constituant-d-un/>
- Laborde C. et Laborde J.M. (2005). The development of a dynamical geometry environment Cabri-géomètre. In K. Heid et G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: syntheses, cases and perspectives*. Information Age Publishing.
- Larkin, K. (2015). "An App! An App! My Kingdom for An App": An 18-month quest to determine whether apps support mathematical knowledge building. In T. Lowrie et R. Jorgensen (Eds.), *Digital Games and Mathematics Learning: Potential, Promises and Pitfalls* (Vol. 4, p. 251-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9517-3_13
- Lee, K. (2012). Augmented reality in education and training. *Tech Trends*, 56, 13-21. <https://doi.org/10.1007/s11528-012-0559-3>
- Leung, A. et Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. In A. Watson et M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education, New ICMI Study Series* (p. 191-224). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_6
- Ludwig, M. et Jablonski, S. (2021). Step by step: simplifying and mathematizing the real world with MathCityMap. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 30(2), 242-268. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23604>
- Mariotti, M. A. (2014). Transforming images in a DGS: the semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. In S. Rezat et al. (Eds.), *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* (p. 155-172). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3489-4_8
- Metros, S. E. (2005). Learning Objects: A Rose by Any Other Name... *EDUCAUSE Review* 40(4), 12-13. <https://er.educause.edu/-/media/files/article-downloads/erm05410.pdf>
- Nicolas, X., Mercat, C., Jolivet, S., et Trgalová, J. (2023). Ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. et Vivier, L. (Dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des ateliers des actes de EE21* (p. 112-131). IREM de Paris et Université de Paris.
- Nicolas, X. et Trgalová, J. (2019). A virtual environment dedicated to spatial geometry to support the development of vision in space. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen et M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2884-2891). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428742/document>
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. PhD thesis, Bristol University. <https://telearn.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/190412/filename/Olivero-f-2002.pdf>
- Papert, S. (1993). *The children's machine. Rethinking school in the age of the computer*. Basic-Books, Inc.
- Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151. https://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/quad17_BParzysz_06.pdf
- Pepin, B., Gueudet, G. et Choppin, J. (Eds., 2023). *Handbook on digital (curricular) resources*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6>
- Pierce, R. et Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9158-6>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462/document>
- Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. In L. Fan et al. (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (p. 69-88). ICME-13 Monographs. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>

- Restrepo, A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6^e*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble 1. <https://theses.hal.science/tel-00334253>
- Reverdy, C. (2014). Du programme vers la classe : des ressources pour enseigner. *Dossier de veille de l'IFE n°96*. <http://veille-et-analyses.ens-lyon.fr/DA-Veille/96-novembre-2014.pdf>
- Robertson, A. (2006). *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*. Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada. <http://www.refad.ca>
- Robotti, E. (2013). Dynamic representations for algebraic objects available in AlNuSet: How develop meanings of the notions involved in the equation solution. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (p. 99-108), Oxford.
- Schacht, F. et Swidan. O. (2019). Exploring pre-calculus with augmented reality. A design-based-research approach. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen et M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428775/document>
- Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M. et Drijvers, P. (2021). Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 447-469. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10053-0>
- Sinclair, N. et Pimm, D. (2015). Mathematics using multiple sense: Developing finger gnosis with three-and four-year-olds in an era of multi-touch technologies. *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education*, 9(3), 99-109. <http://dx.doi.org/10.17206/apjrece.2015.9.3.99>
- Trouche, L. (2002). Les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques : une évolution rapide des matériels, des effets différenciés. In D. Guin et L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (p. 21-53). La Pensée Sauvage. <https://hal.science/hal-01546447>
- Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. et Vivier, L. (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des ateliers des actes de l'École d'été 21*. IREM de Paris.
- Wiley, D. A. (2002). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), *The instructional use of learning objects* (p. 3-23). Agency for Instructional Technology and Association for Educational Communications & Technology.
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9, 625–636. <http://doi.org/10.3758/BF03196322>